

Orvosi jel- és képfeldolgozás transzformációs módszerekkel

Bognár Gergő

Témavezető: Dr. Fridli Sándor

ELTE Informatika Doktori Iskola
ELTE IK Numerikus Analízis Tanszék

Doktori védés
2020. február 24.

Tartalom

- 1 Bevezetés
- 2 EKG szívütés-osztályozás
- 3 EKG szegmentálás
- 4 Az inverzpólusok érzékenysége
- 5 CT képminőségmérés

Tartalom

- 1 Bevezetés
- 2 EKG szívütés-osztályozás
- 3 EKG szegmentálás
- 4 Az inverzpólusok érzékenysége
- 5 CT képminőségmérés

Bevezetés

Motiváció

- Orvosi jelek és képek elemzése (EKG és CT)
- Automatikus feldolgozás és analízis
- Orvossalakértők munkájának segítése
- Klinikai alkalmazás
- Hordozható kézi és okoseszközök

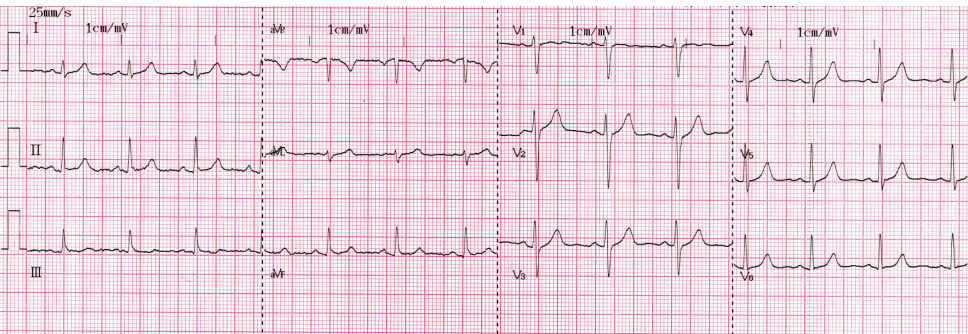
Megközelítés

- Matematikai és informatikai technikák
- Matematikai modellezés
- Transzformációs módszerek
- Algoritmusfejlesztés
(reprezentáció, szűrés, szegmentálás, osztályozás, képminőségmérés, ...)
- Validálás valós adatokon

Tartalom

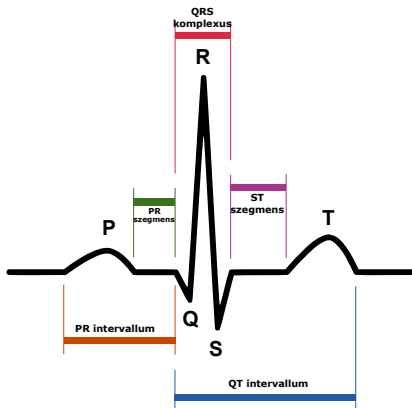
- 1 Bevezetés
- 2 EKG szívütés-osztályozás**
- 3 EKG szegmentálás
- 4 Az inverzpólusok érzékenysége
- 5 CT képminőségmérés

EKG jelfeldolgozás



12 elvezetéses elektrokardiogram (EKG)

EKG jelfeldolgozás



Egy periódus: szívtetés

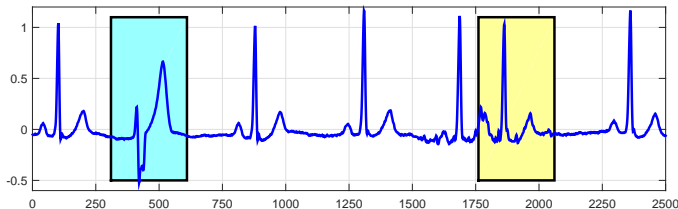
Morfológia

- QRS komplexus
- P, T hullámok
- Szegmensek, intervallumok

Feladatok, problémák

- Szűrés, előfeldolgozás
- Szívtetés-detektálás (R-csúcs)
- Szívritmus analízise
- **Reprezentáció**, tömörítés
- **Szegmentálás**
- **Diagnosztikai paraméterek kinyerése**
- **Abnormalitások detektálása**

EKG szívütés-osztályozás



Morfológiai és dinamikus aritmia

Feladat

- **Célkitűzés:** szívütések aritmia szerinti osztályozása (ANSI/AAMI szabvány, PhysioNet: 5 ill. 16 diagnosztikai osztály)
- **Alkalmazás:** kardiológusok munkájának segítése (hosszú periódusú (Holter) mérések, hordozható mobil eszközök, ...)
- **Kiértékelés:** MIT-BIH Arrhythmia Database (PhysioNet) (standard tesztadatbázis, 110 108 szívütés, szakértői annotációk)

EKG szívütés-osztályozás

Általános módszertan

- Előfeldolgozás, szívütésekre bontás
- Szívütések modellezése
(transzformációs módszerek: Fourier, Hermite, waveletek, ...)
- Jellemzőgenerálás: dinamikus és morfológiai jellemzők
(RR intervallum jellemzők, transzformáció együtthatók, PCA, ICA, ...)
- Osztályozás (gépi tanulás)
- Elvezetések fúziója

Ötlet

- Szívütések modellezése racionális függvényekkel
- Páciens-specifikus adaptív transzformáció
- Morfológiai jellemzők: együtthatók és rendszerparaméterek

Racionális rendszerek

Racionális függvények

- Racionális alapfüggvények ($a \in \mathbb{D}$ inverzpólus, $k \in \mathbb{N}^+$ rend):

$$r_a(z) = \frac{1}{1 - \bar{a}z}, \quad r_{a,k}(z) = r_a^k(z) \quad (z \in \bar{\mathbb{D}})$$

- Leszűkítés az egységkőre: $[-\pi, \pi] \ni t \mapsto e^{it} \mapsto r_{a,k}(e^{it}) \in L^2(\mathbb{T})$

Racionális approximáció

- Racionális rendszer ($\mathbf{a} \in \mathbb{D}^n$ inverzpólusok, $\mathbf{m} \in (\mathbb{N}^+)^n$ multiplicitások):

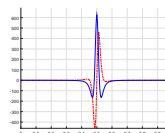
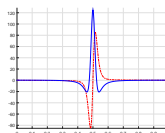
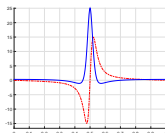
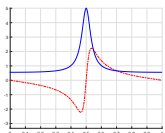
$$\{r_{a_j, k_j} : j = 1, \dots, n; k_j = 1, \dots, m_j\}$$

- $f \in L^2[-\pi, \pi]$ jel modellezése:

$$f(t) \approx \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{m_j} c_{jk} \cdot r_{a_j, k}(e^{it}) \right) \quad (t \in [-\pi, \pi))$$

- Hilbert-térbeli approximáció, legkisebb négyzetes közelítés: $f \approx P_{\mathbf{m}}^{\mathbf{a}} f$

Racionális rendszerek



Inverzpólus: 0.8, rend: 1-4

Motiváció

- **Flexibilis, adaptív rendszerek:** tetszőleges számú szabad paraméter
- **Szívütés modellezési képesség**
 - Hasonlóság az EKG hullámformákkal (P, QRS, T)
 - Az EKG jel alakját követve határozható meg
 - A projekciók közvetlen diagnosztikai információt hordoznak
- **Időbeli lokalizáltság** (alapfüggvények esetén)
- **Matematikai tulajdonságok**
 - Egyszerű analitikus reprezentáció
- **Előzmények** (Numerikus Analízis Tanszék)
 - Schipp Ferenc, Fridli Sándor, Lócsi Levente, Kovács Péter

Racionális rendszerek

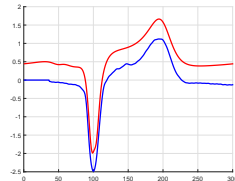
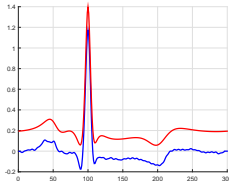
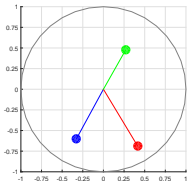
Adaptív racionális transzformáció

- Adott rendszer esetén: ortogonális projekció (L^2)
- Ortogonális, biortogonális, diszkrét ortogonális reprezentációk (Malmquist-Takenaka rendszerek, Blaschke-függvények, ...)
- Adaptivitás: inverzpólusok optimális megválasztása (pólusszám, multiplicitás, érték)
- Ált. nemlineáris optimalizációs probléma
- *Variálható vetítőoperátorok*

Pólusválasztás kérdései

- Elvárások, célfüggvény (pl. approximációs hiba)
- Stratégia (pl. pólusszám és multiplicitás rögzítése)
- Hatókör (pl. kiterjesztés több szívütésre)
- Algoritmusok, keresési tér (pl. hip. Nelder–Mead, Matching Pursuit)
- Kezdőpontválasztás

Osztályozási módszertan

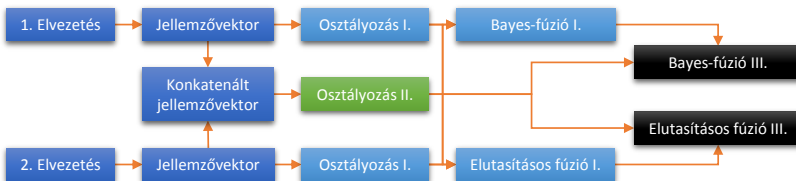


Pólusoptimalizálás és racionális approximáció

Kidolgozott módszer

- **Előfeldolgozás:** szokásos szűrési technikák
- **Szivűtésekre bontás:** rögzített ablakméret adaptív módosítása
- **Szivűtések modellezése:** racionális modellgörcbe (3 inverzpólus, rögzített (2,4,2) multiplicitás)
- **Racionális optimalizáció:** páciens-adaptív póluskombináció (hip. Nelder–Mead módosítása és leszűkítése, lépésenkénti optimalizálás, adaptív kezdőpontválasztás)

Osztályozási módszertan



Osztályozási stratégiák áttekintése

Kidolgozott módszer (folyt.)

- **Jellemzőgenerálás:** morfológiai és dinamikus (racionális transzformáció együtthatói és rendszerparaméterei + RR)
- **Osztályozás:** SVM és ANN, megfelelő paraméterbeállítással
- **Fúzió:** elvezetések és stratégiák
- **Kiértékelés:** MIT-BIT Arrhythmia Database (osztály- és páciens-orientált séma)

Eredmények

Módszer	Jellemzővektor	Osztályozó	Pontosság
[Lag+00]	Hermite	SOM	98.49%
[PraSah03]	Wavelet + RR	ANN	96.77%
[OsoHoaMar04]	Hermite + HOS	SVM	98.18%
[RodGonIII05]	Hullámforma e.h.	DT	96.13%
[Jia+06]	Wavelet + ICA	SVM	98.86%
[YeVKCoi12]	Wavelet + ICA (PCA) + RR	SVM	99.32% (99.71%)
[BogFri18]	Racionális + RR	SVM	99.38% (99.66%)
[BogFri19a]	Racionális + Pólusszög + RR	SVM	99.48% (99.72%)
[BogFri19a]	Fúzió	SVM	99.51% (99.76%)

Osztály-orientált séma eredményei

Módszer	Jellemzővektor	Osztályozó	Pontosság
[ChaODwRei04]	Hullámforma e.h. + RR	LD	86.1%
[LlaKhaMar12]	Hullámforma + wavelet + RR	LD	93%
[YeVKCoi12]	Wavelet + ICA (PCA) + RR	SVM	86%
Bognár G.	Racionális + Pólusszög + NRR	SVM	93.46%
[DozBogKov19]	B-spline/Racionális/Hermite/Wavelet + Paraméterek + RR, kombináció	SVM	94.2%

Páciens-orientált séma eredményei

Összefoglalás

1. tézis: EKG szívütés-osztályozás

Kidolgoztam egy új, páciens-specifikus modellezésen alapuló szívütés-osztályozási módszert, melynek teljesítménye meghaladja a korábbi eljárásokét.

[BogFri18] G. Bognár és S. Fridli. „Heartbeat Classification of ECG Signals Using Rational Function Systems”. *Computer Aided Systems Theory – EUROCAST 2017. Lecture Notes in Computer Science, vol. 10672*. Szerk. R. Moreno-Díaz et al. Springer, Cham, 2018, 187–195.

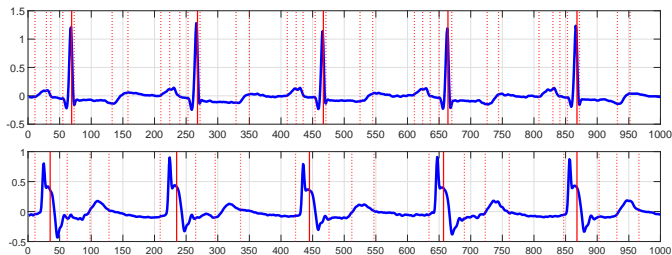
[BogFri19a] G. Bognár és S. Fridli. „ECG Heartbeat Classification by Means of Variable Rational Projection”. *Biomed. Sign. Process. Control* (közlésre benyújtva).

[DozBogKov19] T. Dózsa, G. Bognár és P. Kovács. „Ensemble learning for heartbeat classification using adaptive orthogonal transformations”. *Computer Aided Systems Theory – EUROCAST 2019. Lecture Notes in Computer Science*. Szerk. R. Moreno-Díaz et al. Springer, megjelenés alatt.

Tartalom

- 1 Bevezetés
- 2 EKG szívütés-osztályozás
- 3 EKG szegmentálás**
- 4 Az inverzpólusok érzékenysége
- 5 CT képminőségmérés

EKG szegmentálás

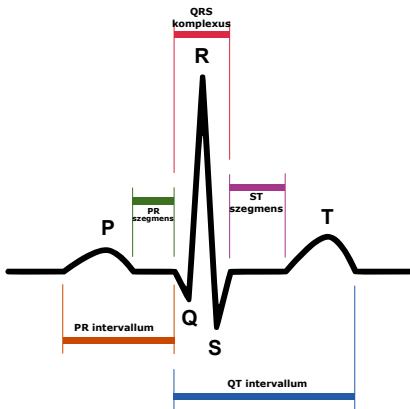


Hullámformák kritikus pontjai

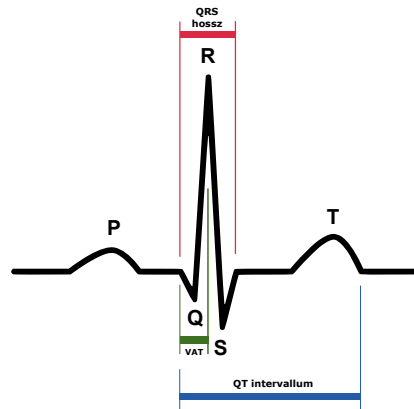
Feladat

- **Célkitűzés:** szivütések modellezése, hullámformákra bontása (P, QRS, és T hullám; kritikus pontok: kezdő-, csúc-, és végpont)
- **Alkalmazás:** diagnosztikai segédeszköz (diagnosztikai mennyiségek kinyerése, abnormalitások detektálása, ...)
- **Kiértékelés:** QT Database (PhysioNet) (standard tesztadatbázis, 3623 szivütés, szakértői annotációk)

EKG szegmentálás

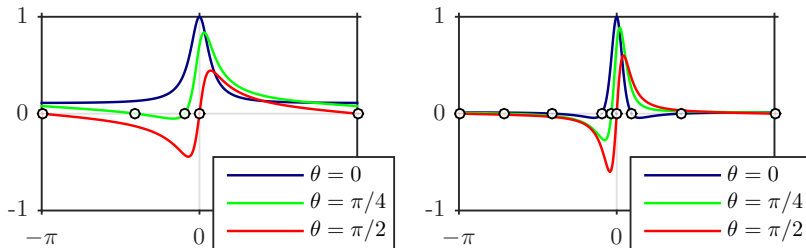


Hullámformák és kritikus pontok



Néhány diagnosztikai mennyiség

QRS modellezés



Példák az E_θ modellgörbére ($a = 0.8$, $n = 1, 2$)

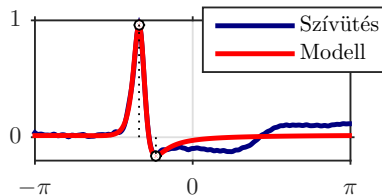
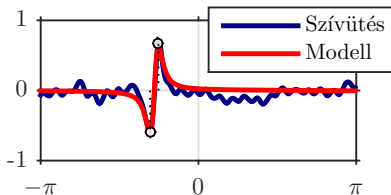
QRS komplexus modellezése

- $a \in \mathbb{D}$ inverzpólus, $n \in \mathbb{N}^+$ rend, $\theta \in [-\pi, \pi)$ együttható:

$$E_\theta(t) := \operatorname{Re} \left(e^{-i\theta} \tilde{r}_a^n (e^{it}) \right) \quad (t \in [-\pi, \pi))$$

- Kritikus pontok származtatása: zérus- és maximumhelyek
- Analitikus viselkedés leírása, kritikus pontok explicit meghatározása

Paraméterrekonstrukció

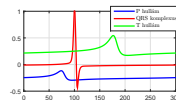
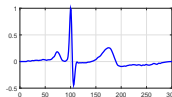
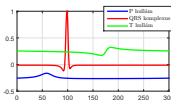
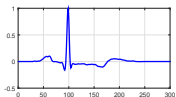


Valós szívütések rekonstruált modellgörbéi

Paraméterrekonstrukció

- Inverzprobléma: modell rekonstrukciója a kritikus pontok, ill. diagnosztikai jellemzők alapján
- Alkalmazás: QRS szintetizálás, alternatív pólusazonosítási módszer
- Vizsgált részproblémák: szimmetrikus, antiszimmetrikus, általános
- Analitikus ill. numerikus előállítás lehetősége

Hullámformák modellezése



Szívütések és szegmentált hullámformák

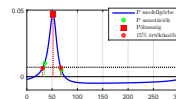
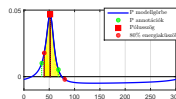
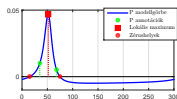
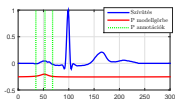
Hullámformák modellezése

- Cél: P, QRS, és T hullámok morfológiailag helyes modellezése
- Javaslat: 3 inverzpozus, rögzített (1,4,1) multiplicitások:

$$E(t) := \operatorname{Re} \left(c_0 + \underbrace{c_1 \cdot r_{a_1}(e^{it})}_{=: E_1^*(t)} + \underbrace{\sum_{j=1}^4 c_{2j} \cdot r_{a_{2,j}}(e^{it})}_{=: E_2^*(t)} + \underbrace{c_3 \cdot r_{a_3}(e^{it})}_{=: E_3^*(t)} \right)$$

- Kétlépéses optimalizálás: páciens- és szívütés-adaptív
- Modellgörbék: $E_{\{1,2,3\}}^*$ racionális komponensek normalizálása

Szegmentálás módszertan



Egy P hullám kritikus pontjainak detektálása

Kidolgozott módszer

- **Előfeldolgozás és szegmentálás**
(zajsűrítés, alapvonalvándorlás szűrése, amplitúdókiegyenlítés)
- **Modellezés és hullámformákra bontás:** racionális modellgörbék
- **Kritikus pontok detektálása:** többféle megközelítés
 - Geometriai: zérus- és szélsőérték helyek
 - Modellalapú: pólusszög
 - Módosított geometriai: küszöbszint elérése
 - Energiaalapú: energiaszint elérése
 - **Kombináció**

Eredmények

	Javasolt [BogFri19b]		LPD [LagJanCam94]		Wavelet [Mar+04]		Hermite [Kov+17]	
	$\overline{\mu_e}$	$\overline{\sigma_e}$	$\overline{\mu_e}$	$\overline{\sigma_e}$	$\overline{\mu_e}$	$\overline{\sigma_e}$	$\overline{\mu_e}$	$\overline{\sigma_e}$
P _{on}	0.17	34.14	14.02	13.32	2.00	14.80	1.05	14.86
P _{peak}	1.25	14.88	4.78	10.56	3.60	13.20	11.10	14.58
P _{end}	0.09	35.54	-0.12	12.32	1.90	12.80	13.21	15.81
T _{peak}	-9.07	25.49	-7.19	14.28	0.20	13.90	-10.92	12.49
T _{end}	1.08	34.44	13.50	27.00	-1.60	18.10	5.19	16.83

$\overline{\mu_e}$: átlagos eltérés, $\overline{\sigma_e}$: átlagos szórás

Szegmentálási eredmények

Összefoglalás

2. tézis: EKG szegmentálás

Egy új, adaptív megközelítést javasoltam az EKG hullámformák modellezésére, szegmentálására és rekonstrukciójára. A kritikus pontok detektálására kifejlesztett módszer több szempontból meghaladja a korábbi eljárások hatékonyságát, melyek közül a P-hullám helyének eddigieknél pontosabb meghatározását emelem ki.

- [BogFri19b] G. Bognár és S. Fridli. „ECG Segmentation by Adaptive Rational Transform”. *Computer Aided Systems Theory – EUROCAST 2019. Lecture Notes in Computer Science*. Szerk. R. Moreno-Díaz et al. Springer, megjelenés alatt.
- [BogSch18] G. Bognár és F. Schipp. „Geometric interpretation of QRS complexes in ECG signals by rational functions”. *Ann. Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.* 47 (2018. aug.), 155–166.

Tartalom

- 1 Bevezetés
- 2 EKG szívütés-osztályozás
- 3 EKG szegmentálás
- 4 Az inverzpólusok érzékenysége
- 5 CT képminőségmérés

Inverzpólusok érzékenysége

Motiváció

- Optimális póluskombináció meghatározásának kérdésköre
- Pólusok megváltoztatásának hatása
(approximáció, együtthatók és geometriai jellemzők érzékenysége, ...)
- Relevancia: EKG jelfeldolgozás racionális transzformációval
(kvantálás, pólusoptimalizáció vezérlése, ...)

Feladat

- Racionális alap- ill. elemi függvények vizsgálata
- Inverzpólus perturbációja, rögzített rend ill. multiplicitás mellett
- Csak a pólusnagyság változtatása (\rightarrow pólusszög részleges stabilitása)
- Cél: approximációs hiba vizsgálata, a pólusnagyság lehetséges megváltoztatásának becslése a megengedhető approximációs hiba függvényében

Vizsgált feladatok

Approximációs problémák

(A) Racionális alapfüggvény approximációja

$$f(z) = c \cdot r_a^n(z) \approx g(z) = d \cdot r_b^n(z) \quad (z \in \mathbb{T})$$

(B) Racionális elemi függvény approximációja

$$f(z) = \sum_{k=1}^m c_k \cdot r_a^k(z) \approx g(z) = \sum_{k=1}^m d_k \cdot r_b^k(z) \quad (z \in \mathbb{T})$$

Vizsgált kérdések

- Adott: $a, b \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ különböző inverzpólusok, $n \in \mathbb{N}^+$ rend ill. $m \in \mathbb{N}^+$ multiplicitás, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ill. $\mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ együttható(k)
- Legkisebb négyzetes közelítés: $d \in \mathbb{C}$ ill. \mathbb{C}^m együttható(k)
- Relatív hiba vizsgálata a, b , és n ill. m függvényében ($0 < \varepsilon < 1$):

$$PRD(f, g) = \frac{\|f - g\|_2}{\|f\|_2} < \varepsilon$$

Eredmények

Matematikai összefüggések

- PRD kifejezése skaláris szorzattal ill. Gram-mátrixszal
- Skaláris szorzat explicit megadása
- Speciális Gram-mátrix Cholesky-felbontásának meghatározása

Eredmények

- Pólusnagyság perturbációja
 $a \in [0.5, 1)$, $h \in (0, a)$, $b = a - h \in (0, 1)$, $n, m \in \mathbb{N}^+$
- $PRD < \varepsilon$ elégséges feltételei ($0 < \varepsilon < 1$):

$$(A) \quad h < \frac{1 - a^2}{\sqrt{4(n-1)^2(1-a^2)^2 + (2n-1)}} \varepsilon$$

$$(B) \quad h < \frac{1 - a^2}{\sqrt{3m^2 - 5m + 3}} \varepsilon$$

Összefoglalás

3. tézis: Az inverzpólusok érzékenysége

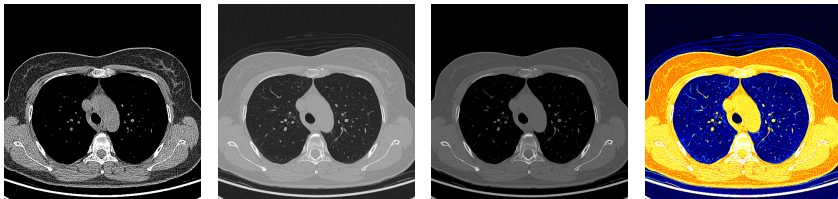
A racionális rendszerekkel történő approximáció problémakörét vizsgálva alkalmas felső korlátot adtam a pólusnagyság perturbációjára a megengedhető approximációs hiba függvényében.

[BogFri19c] G. Bognár és S. Fridli. „On the Pole Stability of Rational Approximation”. *Ann. Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.* 49 (2019 okt.), 35–49.

Tartalom

- 1 Bevezetés
- 2 EKG szívütés-osztályozás
- 3 EKG szegmentálás
- 4 Az inverzpólusok érzékenysége
- 5 CT képminőségmérés

CT képfeldolgozás

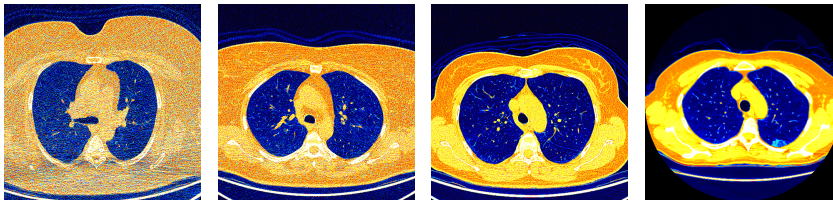


Tüdő CT szelet különböző megjelenítésekkel

CT képalkotás

- 3D (főként orvosi) képalkotás
- Fizikai háttér: röntgensugarak elnyelődése
- Matematikai háttér: Radon-transzformáció és szűrt visszavetítés
- Technikai háttér: transzverzális szeletek, szürkeárnyalatos (HU)
- Számos feldolgozási probléma

CT képminőségmérés

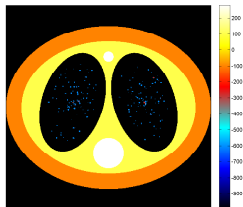


Különböző minőségű alacsony dózisu tüdő CT felvételek

Motiváció, feladat

- Alacsony dózisu felvételezés: képminőség romlása (Pozitron-Diagnosztika Központ együttműködés)
- Képminőségmérés: ún. képminőségmérő metrikák
- Célkitűzés: referenciakép nélküli, automatikus, objektív képminőségmérés, alacsony dózisu tüdő CT képekre
- Alkalmazás: képrögzítés, rekonstrukció vezérlésére, algoritmusfejlesztés kiértékelése

Tüdőfantom és szimuláció



Tüdőfantom

Tüdőfantom

- Tüdő sematikus képe
- Analitikus ellipszismodell (lásd Shepp–Logan agyfantom)
- Radon-transzformált ismert

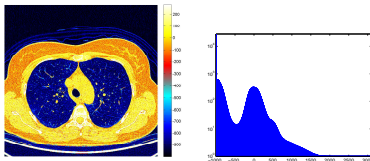
Zajmodellezés

- Elektromos érzékelő zajmodellek adaptálása
- Gauss- és Poisson-zaj generálása
- Paraméterezhető zajszint

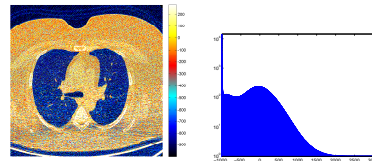
CT szimuláció

- Szinogram és zaj szintetizálása, rekonstrukció (szűrt visszavetítés)
- Valós fizikai paraméterek alapján

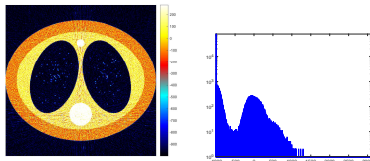
Tüdőfantom-konstrukció



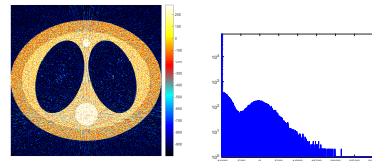
Valós CT és hisztogramja



Valós CT és hisztogramja



Tüdőfantom ($a = 10^{-4}, b = 10^{-7}$)



Tüdőfantom ($a = 5 \cdot 10^{-4}, b = 10^{-7}$)

Képminőségmérési módszertan

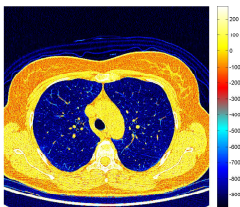
Ötlet

- Nincs referenciakép, de anatómiai hasonlóság
- Referenciakép származtatása adaptív szűréssel
- Intezitás szerinti klaszterezés

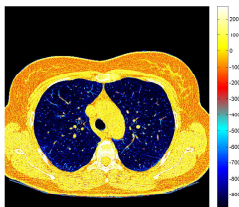
Kidolgozott módszer

- **Előfeldolgozás:** háttér leválasztása és gammakorrekció
- **Klaszterezés:** SKFCM módosítása
 - *Cél:* homogén szöveti régiók kialakítása, de tüdőszövet részletességének megőrzése
 - *JavaSlat:* fix referenciapontok, változó ablakméret és súlyozás, módosított minimalizálási kifejezés és kilépési feltételek
- **Mérőszám:** SSIM a szűrt és eredeti kép között

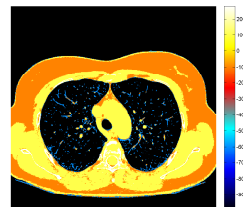
Eredmények



Eredeti CT kép

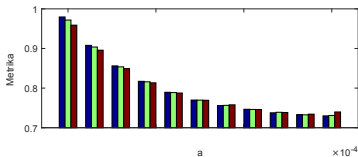


Előfeldolgozott kép

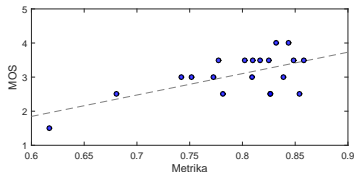


Klaszterezett kép

Eredmények



Fantomtanulmány



Orvosszakértői MOS

Eredmények kiértékelése

- **Fantomtanulmány:** objektív kiértékelés a tüdőfantomon végzett zajmodellezés és CT szimuláció segítségével
Eredmény: zajparaméterek közel monoton követése
- **Valós CT képek:** kvantitatív vizsgálat és szubjektív kiértékelés orvosszakértői MOS alapján
Eredmény: korreláció az MOS és a mérőszámok között
- **Összehasonlítás más módszerekkel:** CNR és SNR
Eredmény: korreláló eredmények, de automatizálhatóbb

Összefoglalás

4. tézis: CT képminőségmérés

Egy új metrikát fejlesztettem ki alacsony dózisú tüdő CT felvételek képminőségének objektív mérésére, valamint egy CT szimulációs környezetet alakítottam ki egy új tüdőfantom felhasználásával.

- [Bog15] G. Bognár. „Image quality measurement for low-dose human lung CT scans”. *38th Int. Conf. Telecom. Sign. Proc. (TSP)*. 2015. júl., 587–591.
- [Bog16] G. Bognár. „A No-Reference Image Quality Metric with Application in Low-Dose Human Lung CT Image Processing”. *Int. J. Adv. Telecom. Elect. Sign. Syst.* 5.1 (2016. jan.), 1–7.

A szerző publikációi

[Bog15] G. Bognár. „Image quality measurement for low-dose human lung CT scans”. *38th Int. Conf. Telecom. Sign. Proc. (TSP)*. 2015. júl., 587–591.

[Bog16] G. Bognár. „A No-Reference Image Quality Metric with Application in Low-Dose Human Lung CT Image Processing”. *Int. J. Adv. Telecom. Elect. Sign. Syst.* 5.1 (2016. jan.), 1–7.

[Bog+19] G. Bognár, S. Fridli, P. Kovács és F. Schipp. „Adaptive Rational Transformations in Biomedical Signal Processing”. *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2018. Mathematics in Industry, vol. 30*. Szerk. S. Péter et al. Springer, Cham, 2019, 239–247.

[BogFri18] G. Bognár és S. Fridli. „Heartbeat Classification of ECG Signals Using Rational Function Systems”. *Computer Aided Systems Theory – EUROCAST 2017. Lecture Notes in Computer Science, vol. 10672*. Szerk. R. Moreno-Díaz et al. Springer, Cham, 2018, 187–195.

[BogFri19a] G. Bognár és S. Fridli. „ECG Heartbeat Classification by Means of Variable Rational Projection”. *Biomed. Sign. Process. Control* (közlésre benyújtva).

[BogFri19b] G. Bognár és S. Fridli. „ECG Segmentation by Adaptive Rational Transform”. *Computer Aided Systems Theory – EUROCAST 2019. Lecture Notes in Computer Science*. Szerk. R. Moreno-Díaz et al. Springer, megjelenés alatt.

[BogFri19c] G. Bognár és S. Fridli. „On the Pole Stability of Rational Approximation”. *Ann. Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.* 49 (2019 okt.), 35–49.

[BogSch18] G. Bognár és F. Schipp. „Geometric interpretation of QRS complexes in ECG signals by rational functions”. *Ann. Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.* 47 (2018. aug.), 155–166.

[DozBogKov19] T. Dózsa, G. Bognár és P. Kovács. „Ensemble learning for heartbeat classification using adaptive orthogonal transformations”. *Computer Aided Systems Theory – EUROCAST 2019. Lecture Notes in Computer Science*. Szerk. R. Moreno-Díaz et al. Springer, megjelenés alatt.