Beadható házi feladatok II.

Numerikus Módszerek 2. GY (B/4, B/5 csoport)
programtervező informatikus BSc, 2017-2018-2

Kidolgozandó feladatok

F1. Tegyük fel, hogy az $\{(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3)\}$ pontok feletti interpolációs polinom, és természetes köbös spline megegyeznek. Mit mondhatunk ekkor ezen pontokról? *(1 pont)*

F2. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, és legyen $B := \begin{bmatrix} \mathbf{0} & A \\ A^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$. Milyen összefüggés van B sajátértékei és A szinguláris értékei között? *(1 pont)*

F3. Bizonyítsd be, hogy ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mátrixra $rang(A) = 1$, akkor

a) Az A mátrix általánosított inverze: $A^+ = \dfrac{A^T}{||A||_2^2}$ *(0,5 pont)*

b) Az A márix 2-es és Frobenius normájára: $||A||_2 = ||A||_F$ *(0,5 pont)*

F4. Bizonyítsd be SVD segítségével, hogy az alábbi Gauss-szűrő mátrixok szeparábilisek, azaz felírhatóak $A_n = u \cdot v^T$ $(u, v \in \mathbb{R}^n)$ alakban. *(1 pont)*

$$A_3 = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \frac{1}{256}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

F5. Mutasd meg, hogy a legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő egyenes illesztésének problémája eltolás-, de nem elforgatásinvariáns. (Azaz ha az eredeti pontokat eltoljuk a koordinátarendszerben, akkor az eltolt pontokra illesztett egyenes megkapható az eredeti pontokra illesztett egyenes eltolásával. Ugyanez viszont általában nem mondható el, ha az eredeti pontokat adott középpont körül elforgatjuk.) *(1 pont)*

F6. Milyen formulát kapunk az $\int\limits_0^1 f(x)dx$ integrál közelítésére az f függvény n-edfokú, 0 körüli Taylor-polinomja segítségével? Készíts hibabecslést. Hányadfokig pontos a kapott formula? *(1 pont)*

Programozás feladatok

P1. Készíts programot, amely kiértékeli az $\Omega_\infty = \mathbb{Z}$ alappontrendszer feletti $B_{\ell,k}(x)$ B-spline helyettesítési értékét adott $\ell \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$ esetén, adott $x \in \mathbb{R}$ pontban, a rekurzív összefüggés alapján. A programot hatékonyan (pl.: dinamikus programozási sémát követve) implementáld. *(1 pont)*

P2. Készíts programot digitális jel újramintavételezésére természetes köbös spline interpolációt használva. (Azaz adott alappontok és függvényértékek alapján készítsd el a köbös spline-t természetes peremfeltételekkel, majd számítsd ki a helyettesítési értékeit egy adott új alappontrendszer felett. Teszteléshez használhatod a $[0, 1]$ intervallum különböző méretű ekvidisztáns felosztásait, mint eredeti és új alappontokat.) *(1 pont)*

P3. Készíts programot, amely adott $\{(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_n, y_n)\}$ pontokhoz elkészíti az őket legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő egyenest. *(1 pont)*

P4. Készíts programot az $\int\limits_a^b f(x)dx$ integrál közelítésére, összetett érintő-, trapéz, ill. Simpson-formula segítségével. A feladatban az adott $[a, b]$ intervallum adott m részre legyen osztva, ill. adottak a függvényértékek az alappontokban. *(2 pont)*

P5. Az $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}dx = \mathrm{arctg}(1) = \dfrac{\pi}{4}$ összefüggés alapján határozd meg π értékét adott pontossággal, az integrál összetett Simpson-formulával történő közelítésével. (Az adott pontosság eléréséhez szükséges alappontok számát a hibabecslés alapján határozd meg.) *(1 pont)*