Beadható házi feladatok I.

Numerikus Módszerek 2. GY (B/4, B/5 csoport)
programtervező informatikus BSc, 2017-2018-2

Kidolgozandó feladatok

F1. Interpoláld az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvényt a $[-1,1]$ intervallumon a $\{-1,1\}$, a $\{-1,0,1\}$, a $\left\{-1,\frac{1}{8},\frac{1}{8},1\right\}$, és a $\left\{-1,\frac{1}{8},0,\frac{1}{8},1\right\}$ alappontokon. Készíts hibabecslést! *(1 pont)*

F2. Keress olyan P polinomot, amely eleget tesz a $P(0) = P'(0) = 1$, $P(-1) = P(1) = 2$, $P^{(2018)}(0) = 2018$! feltételeknek. *(1 pont)*

F3. Bizonyítsd be, hogy $n \geq 2$ esetén az $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ alappontokhoz tartozó $l_0,\ l_1,\ \ldots,\ l_n$ Lagrange alappolinomokra:

a) $\forall x \in (x_0, x_1): \ l_0(x) + l_1(x) > 1$ *(0,5 pont)*

b) $\forall x \in (x_1, x_2): \ 0 < l_0(x) + l_1(x) < 1$ *(0,5 pont)*

c) $\operatorname{sgn}(l_0(x) \cdot l_n(x)) = \begin{cases} 0, & x \in \{x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n\} \\ (-1)^n, & x < x_0 \vee x > x_n \\ (-1)^{n+1}, & x \in [x_0, x_n] \setminus \{x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n\} \end{cases}$ *(1 pont)*

F4. Igazold az interpoláció hibaformulája segítségével, hogy az $f(x) = x^{n+1}$ függvény $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ (különböző) alappontokhoz tartozó n-edrendű osztott differenciájára: $f[x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n] = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$. *(1 pont)*

F5. Igazold, hogy ha P_n az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ (különböző) alappontokhoz tartozó interpolációs polinomja, $x_k \neq 0$ $(k = 0,\ \ldots,\ n)$, és $f(0) = P_n(0) = 0$, akkor $f[x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ 0] = 0$. *(1 pont)*

Programozás feladatok

P1. Interpoláció Newton-alak segítségével

a) Készíts programot, amely adott alappontok és függvényértékek alapján elkészíti az interpoláció Newton-alakjának együtthatóit, illetve programot, amely adott alappontok és az együtthatók alapján ki tudja számítani az interpolációs polinom helyettesítési értékeit. *(1 pont)*

b) Implementáld hatékonyan: az együtthatók meghatározásához $\mathcal{O}(n)$ tárhelyet használj, a helyettesítési értékek kiértékelését Horner-elrendezés szerint végezd. *(0,5 pont)*

P2. Szemléltesd a Runge-féle $f(x) = \dfrac{1}{1 + 25x^2}$ függvény $[-1,1]$ intervallumon vett, ekvidisztáns alappontok ill. a Csebisev-gyökök feletti interpolációs polinomjait, $n = 3,\ 7,\ 15,\ 63,\ 127,\ 255$ pontot felhasználva. A függvényt és a kapott interpolációs polinomokat ábrázold koordinátarendszerben (tetszőleges eszköz segítségével). *(1 pont)*

P3. Határozd meg $\sqrt{2}$ első 6 tizedesjegyét másodfokú inverz interpoláció segítségével. (Azaz készíts programot az $x^2 = 2$ egyenlet közelítő megoldására pl. a $\{0,\ 1,\ 2\}$ alappontokból indulva.) *(1 pont)*

P4. A cos függvény közelítése

a) Közelítsd a cos függvényt a $[0,\pi]$ intervallumon lineáris spline segítségével (ekvidisztáns felosztásból származó alappontok felett), adott pontossággal. (Azaz határozd meg az alappontok szükséges számát, majd készítsd el a programot, amely ki tudja számítani a spline helyettesítési értékeit.) *(1 pont)*

b) Az implementáció során csak az alapműveleteket használd. (Tehát a cos függvényt ne, az interpolációs pontok kiértékeléséhez sem. A helyettesítési értékeket az addíciós tételek alapján számold.) *(0,5 pont)*

P5. Készíts programot digitális jel újramintavételezésére természetes köbös spline interpolációt használva. (Azaz adott alappontok és függvényértékek alapján készítsd el a köbös spline-t természetes peremfeltételekkel, majd számítsd ki a helyettesítési értékeit egy adott új alappontrendszer felett. Teszteléshez használhatod a $[0,1]$ intervallum különböző méretű ekvidisztáns felosztásait, mint eredeti és új alappontokat.) *(1 pont)*