



EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
INFORMATIKAI KAR
NUMERIKUS ANALÍZIS TANSZÉK

Orvosi jel- és képfeldolgozás transzformációs módszerekkel

DOKTORI ÉRTEKEZÉS

Bognár Gergő

Témavezető: Dr. Fridli Sándor, egyetemi tanár, DSc.

Budapest, 2019.

Doktori iskola: ELTE Informatika Doktori Iskola
Az iskola vezetője: Dr. Csuha Varjú Erzsébet, egyetemi tanár, DSc.
Doktori program: Numerikus és szimbolikus számítások
A program vezetője: Dr. Weisz Ferenc, egyetemi tanár, DSc.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	3
1. Matematikai és informatikai háttér	5
1.1. Célkitűzés és motiváció	5
1.2. Általános orvosi jelfeldolgozás módszertan	6
1.3. Jelek és modellezésük	8
1.4. Hilbert-térbeli approximáció	12
1.5. Racionális rendszerek	17
1.6. Radon-transzformáció	26
1.7. Osztályozás, klaszterezés, gépi tanulás	32
2. EKG szívütés-osztályozás	41
2.1. EKG feldolgozás	41
2.2. Problémafelvetés és előzmények	47
2.3. Racionális rendszerek az EKG feldolgozásban	50
2.4. Szívütések modellezése	54
2.5. Osztályozási módszertan	56
2.6. Eredmények értékelése	65
2.7. Összefoglalás	72
3. EKG szegmentálás	73
3.1. Problémafelvetés és előzmények	73
3.2. A QRS komplexus modellezése	75
3.3. Paraméterrekonstrukció	79

3.4. Hullámformák modellezése	85
3.5. Szegmentálási módszertan	86
3.6. Eredmények értékelése	91
3.7. Összefoglalás	92
4. Az inverzpólusok érzékenysége	93
4.1. Problémafelvetés és előzmények	93
4.2. Approximációs problémák	94
4.3. Matematikai összefüggések	96
4.4. Eredmények értékelése	100
4.5. Összefoglalás	106
5. CT képminőségmérés	107
5.1. CT feldolgozás	107
5.2. Problémafelvetés és előzmények	115
5.3. Zajmodellezés és CT szimuláció	116
5.4. Tüdőfantom-konstrukció	119
5.5. Képminőségmérési módszertan	123
5.6. Eredmények értékelése	127
5.7. Összefoglalás	130
Fejlesztői környezet	131
Köszönetnyilvánítás	133
Tárgymutató	135
Jelölések	137
Irodalomjegyzék	139

Bevezetés

Értékezésemben az orvosi jel- és képfeldolgozás területén végzett kutatásaim eredményét mutatom be, melynek során egyes EKG és CT feldolgozási problémákkal foglalkoztam. A célkitűzésem olyan, gyakorlati körülmények között is megbízhatóan működő, automatikus módszerek fejlesztése volt, amelyek az adott problémákhoz illeszkedő, elméletileg is megalapozott matematikai modellből származnak. Kutatásaim központi témája a transzformációs módszerek, illetve az ezekhez kapcsolódó approximációs kérdések, numerikus optimalizálás, szegmentálás, osztályozás, és klaszterezés lehetőségeinek vizsgálata volt. Munkámat *Dr. Fridli Sándor* témavezetésével végeztem, és az ELTE IK Numerikus Analízis Tanszéken korábban megkezdett jelfeldolgozási kutatásokba kapcsolódtam be. Ezek közül kiemelném az EKG jelek racionális rendszerekkel történő modellezésének ötletét *Dr. Schipp Ferenc* és *Dr. Fridli Sándor* kezdeményezése nyomán (lásd [FriLocSch12]). A felvetést követően a témában számos eredmény (lásd [FriSch11; Fri+12; KovKirGab13; Loc13; GilKovSam14; SamKovGab15; SamKovGab17; Kov18; KovFriSch19]) és két disszertáció (lásd [Loc15; Kov16]) is született, melyek sorát a saját munkáimmal igyekeztem gyarapítani. Értekezésem alapját a [Bog15; Bog16; BogFri18; BogSch18; BogFri19a; BogFri19b; BogFri19c; Bog+19; DozBogKov19] közlemények adják.

A dolgozat felépítése a következő. Az 1. fejezetben az orvosi jel- és képfeldolgozás alapjait, a kutatásom általános célkitűzéseit és motivációit, és az eredményeim háttéréül szolgáló matematikai modelleket és algoritmusokat tekintem át, bevezetve a jelöléseket és a szakzsargont. A jelek és képek matematikai reprezentációja után tárgyalom azok modellezésének és approximációjának lehetőségeit. A fő hangsúlyt a transzformációs módszerekre, ezen belül is elsősorban az adaptív racionális transzformációra helyezem, valamint a CT képképzés alapját képező Radon-transzformációra. Az EKG és CT felvételezés alapjainak, a felvételek fő tulajdonságainak, a kapcsolódó feldolgozási problémáknak, és tesztadatbázisoknak az ismeretét az egyes alkalmazásoknál a 2. és 5. fejezet elején teszem meg. A 2. és 3. fejezetben egy-egy EKG jelfeldolgozási problémát, a szívütések aritmia szerinti osztályozását, illetve a szívütések hullámformák szerinti szegmentálását vizsgálom, új, a szakirodalmi előzményeket meghaladó módszertant kidolgozva (lásd [BogFri18; BogFri19a] és [BogSch18; BogFri19b], valamint [DozBogKov19]). A problémákra adap-

tív racionális transzformációs módszert fejlesztettem. Fontos kiemelni, hogy ugyan a racionális modell [FriLocSch12] alapján adott, a valós alkalmazáshoz számos elvi és gyakorlati kérdést szükséges megvizsgálni, melyeknek átfogó diszkusszióját adom (lásd [Bog+19]). A 3. fejezetben a szegmentálási módszertanon kívül a racionális modell további részleteit is kidolgoztuk (lásd [BogSch18]), amely szívütések diagnosztikai jellemzők mentén történő szintetizálását is lehetővé teszi. A 4. fejezetben az adaptív racionális transzformációhoz kapcsolódó approximációs problémát, az inverzpólusok érzékenységének kérdését tárgyalom [BogFri19c] alapján. Az 5. fejezet egy CT képfeldolgozási probléma, az alacsony dózisu CT felvételek képminőségének objektív méréséről szól. A feladatra egy adaptív modellezésen alapuló képminőség-mérő metrikát fejlesztettem (lásd [Bog15; Bog16]).

1. fejezet

Matematikai és informatikai háttér

A fejezetben orvosi jel- és képfeldolgozás alapvető problémáit és célkitűzéseit, illetve általános megközelítéseit ismertetem. Rövid áttekintést adok a jel- és képfeldolgozás matematikai háttéréről, valamint a kutatásomhoz kapcsolódó modellekről és algoritmusokról. A bemutatás közel sem átfogó vagy teljes körű, a céloom az alapfogalmak és a jelölésrendszer definiálása, a motiváció, az alkalmazási lehetőségek, és néhány felmerülő probléma vázolása, valamint a későbbi fejezetekben szereplő módszertanok megalapozása.

1.1. Célkitűzés és motiváció

Napjaink klinikai diagnosztikai protokolljának szerves része a különböző mérő- és képalkotó eszközök alkalmazása. A teljesség igénye nélkül megemlíteném a vérnyomásmérő eszközöket, a szív működés, illetve agyműködést vizsgáló elektrokardiogramot (EKG) és elektroencefalográfiát (EEG), valamint a 2D és 3D képalkotó eljárásokat: röntgen, ultrahang, komputertomográfia (CT), mágneses rezonancia (MR), pozitronemissziós tomográfia (PET), stb. Az orvosi jel- és képfeldolgozás motivációja és célkitűzése olyan automatizált, számítógép-vezérelt módszerek fejlesztése, amelyek segítik a felvételek orvosi értelmezését. Ez magába foglalja a felvételek szűrését és elemzését, a felvételezés során fellépő zaj és artifaktumok redukálását, a releváns részletek kiemelését, események vagy objektumok automatikus detektálását. Az ilyen módszerek közvetlenül és közvetve is hasznos segédeszközök lehetnek az orvosszakértők számára, mivel a felvételek feldolgozása segítheti azok diagnosztikai kiértékelését, a releváns részek kiemelése pedig csökkentheti a teljes felvétel átnézésével járó emberierőforrás-igényt. A klinikai alkalmazás mellett egyes területeken elterjedőben vannak a hétköznapi használatra szánt mobil egészségügyi eszközök,

például kézi EKG eszközök, okosórák. Ezen eszközök segítségével a mérések egyéni-
leg, orvosi jelenlét nélkül is elvégezhetőek, így kiemeltebb szerepe van az automatikus
kiértékelésnek, például egy valós idejű riasztórendszer esetén, amely adott kritikus
események detektálásakor jelzi az orvosi beavatkozás szükségességét. Az eszközök
fejlesztése és üzemeltetése is újabb kihívásokat hordoz magában. A mobil eszközök
a klinikai változattól eltérő jelminőséggel rendelkezhetnek, egyes feldolgozási lépé-
seket célhardveren kell végrehajtani, szükséges egy online rendszer kiépítése, amely
lehetővé teszi az tényleges orvosi kiértékelést, illetve felmerülhet adatbázis építése az
egyed felvételekből, melynek segítségével nyomon követhető a páciens állapotának
változása. Mindezek még szükségesebbé teszik hatékony jelfeldolgozási módszerek
fejlesztését és alkalmazását.

1.2. Általános orvosi jelfeldolgozás módszertan

A továbbiakban tekintsünk fiziológiai mérésekből származó jeleket mint diszkrét
vagy folytonos idősorokat, és képeket mint pixelek mátrixait vagy folytonos kétválto-
zós függvényeket, melyek pontos matematikai definícióját és modellezési lehetőségeit
a következő fejezetben ismertetem. Előljáróban egy átfogó képet szeretnék adni a
jelfeldolgozási módszerek fő megközelítéseiről, és az orvosi jel- és képfeldolgozó al-
goritmusok általános működéséről.

A jelfeldolgozási módszereket általában két fő családra oszthatjuk: időtérbeli és
frekvenciatérbeli módszerekre. A gyakorlati tapasztalatok szerint a két megköze-
lítés kombinációja is előnyös adott problémák esetén. Az időtérbeli módszerek köz-
vetlenül a jelen fejtik hatásukat, ide tartoznak többek között egyes szűrők, a jel
geometriai transzformációi, kritikus pontok és régiók keresése (zérushelyek, lokális
szélsőértékek, monoton és konvex intervallumok, stb.), érték és energiaalapú küszö-
bölés, statisztikai leíró mennyiségek előállítása (átlag, szórás, korreláció), és egyéb
időtérbeli dekompozíciós módszerek (lásd pl. halfwave-dekompozíció). A frekvencia-
térbeli módszerek a jelet egy matematikai transzformáció segítségével modellezik,
amely jellemzően a jel adott rendszer szerinti Fourier-sorfejtését jelenti. Ide tarto-
zik a klasszikus trigonometrikus Fourier-transzformáció, a waveletek, az Hermite-
és Walsh-függvényekkel végzett transzformáció, és az adaptív racionális transzfor-
máció, amely a dolgozat leghangsúlyosabb eszköze a modellezésre. A transzformáció
számos előnyös tulajdonsággal bír, amely különféle alkalmazásokat tesz lehetővé. A
frekvenciatérbeli elemzéskor az időtérben rejtett részletek is felismerhető válhatnak.
A rendszer körültekintő megválasztásával a jelek adott tulajdonságú reprezentációját
állíthatjuk elő, ez lehetővé teszi a jel releváns részeinek kiemelését, a paraméterter
dimenziójának csökkentését (modellredukció), a jel tömörítését, illetve leíró jellem-
zők generálását. Gyakori problémája a transzformáció alkalmazásakor a megfelelő

motiváció hiánya. Az adott probléma megoldása során ugyanis a jelet sokszor nem célirányos, specializált transzformációval reprezentálják, hanem általánosan működő módszereket (pl.: a trigonometrikus Fourier-transzformációt, vagy a waveleteket) alkalmaznak, receptszerűen. A gyakorlati tapasztalatok alapján a specializált rendszerek sokszor célravezetőbbek. A jelhez illeszkedő rendszerben végzett transzformáció megkönnyíti a reprezentációt és modellredukciót. A sorfejtés már kevés együttthatóval is jól approximálja az eredeti jelet, és ezek az együttthatók a jel releváns részeit emelik ki. Ez a megfigyelés szolgál az adaptív rendszerek alkalmazásának motivációjául, itt maga a rendszer (például a trigonometrikus Fourier-transzformációval szemben) nem rögzített, hanem valamilyen rendszerparamétertől függ. A paraméter megfelelő megválasztásával a jelhez illesztett alaprendszert konstruálhatunk. A dolgozatban bemutatott EKG feldolgozása eredmények ezeket a tapasztalatokat mutatják be az adaptív racionális rendszerekkel végzett transzformációt alkalmazva.

Az orvosi jel- és képfeldolgozás általános módszertanát a lent ismertetett fázisokra bonthatjuk. Itt az egyes fázisoknak csak egy általános jellemzését ismertetem, részletes kifejtésük a későbbi fejezetekben következik, az egyes feladatokhoz kapcsolódóan. A módszertan általános fázisai tehát a következők:

Előfeldolgozás. Célja a zaj szűrése, az ismert artifaktumok és az irreleváns részletek eltávolítása. A zajt és artifaktumokat a felvételezés fiziológiai és műszaki hátterének ismeretében modellezhetjük, előzetes szűrésük növelheti a modellalkotás hatékonyságát és a reprezentáció pontosságát.

Modellalkotás. Feladata az adott problémához illeszkedő matematikai modell felállítása, amely a jeleknek az adott probléma szempontjából releváns részleteit emeli ki. A dolgozat során transzformációs módszereken alapuló modelleket fogok tárgyalni, ezek közül is kiemelve az adaptív rendszerek fontosságát. A modellalkotást hasznos lehet folytonos, analitikus modellek segítségével végezni (lásd *1.3. Jelek és modellezésük*), majd ezt követheti a modell diszkretizálása, és problémaspecifikus alkalmazása.

Reprezentáció. A kidolgozott modell alapján a feladat a jel vagy egyes részeinek előállítására. A kapott reprezentáció jellemzően redukálja az eredeti jel dimenzióját a modell alapján, ezáltal egy approximációs problémát valósít meg. Adaptív modellek esetén a reprezentációs fázis feladata a modell rendszerparamétereinek meghatározása, amely általában egy numerikus optimalizálási problémaként írható le. Az adaptív transzformációs módszerekkel történő reprezentáció problémáit részletesebben tárgyalom a későbbi fejezetekben.

Jellemzőgenerálás. Célja a jelet vagy egyes részeit leíró mennyiségek generálása az adott modell és az abból származtatott reprezentáció alapján. A szakirodalom szerteágazó jellemzővektorokat használ a különböző problémák esetén: a jel kritikus

pontjait, a transzformációs modell együtthatóit és rendszerparamétereit, ezekből származtatott statisztikai mennyiségeket, stb.

Eredményképzés. A módszer kimenetét az előzőek szerint kinyert jellemzők esetleges feldolgozásával kapjuk. A kinyert jellemzők közvetlenül képezhetik a módszer eredményét, illetve további szelekción, küszöbölésen, klaszterezésen, osztályozáson, stb. eshetnek át.

Validálás. A kidolgozott módszer kiértékeléséhez a leghasznosabb az orvosszakértői közreműködés, amely viszont sajnos nem minden esetben áll rendelkezésre, illetve nem feltétlenül érhető el a fejlesztés összes fázisában. A validálást ezért általában tesztadatbázisokon végezzük, melyek adott problémákhoz kapcsolódó szignifikáns jelalakokat tartalmaznak, kardiológusok által ellátott annotációkkal együtt. Ezen adatbázisok az offline tesztelésen kívül a különböző algoritmusok hatékonyságának objektív összehasonlítását is lehetővé teszik. Az egyes problémák esetén használatos sztenderd tesztadatbázisokat a fejezet későbbi szakaszaiban ismertetem.

Fontos kiemelni, hogy a különböző problémák még ugyanazon jelek esetén is különböző modellek és jellemzők alkalmazását teszik szükségessé, így az algoritmusok erősen alkalmazásspecifikusak. Másrészt viszont a gyakorlati tapasztalat azt mutatja, hogy az adott jeltípus adott problémájához kidolgozott modellek megfelelő adaptálás mellett más problémák, sőt akár más jeltípusok esetén is megállják helyüket. Például a szívütések adaptív racionális transzformációval történő modellezése (lásd [FriLocSch12]) számos EKG és EEG feldolgozási probléma esetén hatékonyan alkalmazhatónak bizonyultak, ahogy azt az irodalmi eredmények, és ezen dolgozat későbbi fejezetei ismertetik.

1.3. Jelek és modellezésük

Nevezzünk *jelnek* egy véges, valós (vagy komplex) sorozatot (*diszkrét jel*), illetve egy valós-valós (vagy valós-komplex) típusú függvényt is (*folytonos jel*), melynek adott időpontokban vett mintavételezése a diszkrét jel. Legyen az $n \in \mathbb{N}$ hosszú diszkrét jelünk az

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$$

sorozat, a mintavételezési pontjaink pedig egy $[a, b] \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum ($a < b \in \mathbb{R}$) felosztása:

$$\mathbf{t} = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b) \in [a, b]^{n+1}.$$

A legfontosabb eset az egyenletes mintavételezés, azaz amikor

$$t_k = a + (b - a) \frac{k}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

amely a legtöbb gyakorlati problémához illeszkedik, de speciális esetekben más jelle-
gű mintavételezések hasznosabbak lehetnek. A diszkrét jelhez kapcsolódó folytonos
modellünk egy olyan $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ függvény, melyre $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$, és

$$\mathbf{f} = (f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_n)) = \mathbf{x}.$$

Az f függvényt, az adott problémától függően, valamely speciális függvényosztályba
tartozónak tekintünk (folytonos, folytonosan differenciálható, analitikus, korlátos,
korlátos tartójú, periodikus, L^p -beli, stb.), ezáltal lehetőségünk nyílik függvénytani
módszerekkel vizsgálni a jel viselkedését.

Hasonlóan, nevezzük diszkrét *képek* az $n, m \in \mathbb{N}^+$ térbeli, és $k \in \mathbb{N}^+$ spektrális
felbontású

$$\mathbf{X} \in \mathbb{K}^{n \times m \times k}$$

mátrixot. Speciálisan $k = 1$ esetben *szürkeárnyalatos*, $k = 3$ esetben *színes*, $k > 3$
esetben *multispektrális* képről beszélhetünk. Az $[a, b], [c, d] \subset \mathbb{R}$ zárt intervallumok
($a < b, c < d \in \mathbb{R}$) fentivel analóg \mathbf{u}, \mathbf{v} felosztásai alapján a képet tekinthetjük
az $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ rácson mintavételezett $F \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^k$ függvény mintavételezésének. A
dolgozatomban a képeket legtöbb esetben a jelekkel megegyező módon fogom kezelni
a $\mathbb{K}^{n \times m \times k} \equiv \mathbb{K}^{n \cdot m \cdot k}$ megfeleltetés alapján, külön jelzem, ahol a kétdimenziós jelleg a
hangsúlyos.

1.3.1. Jelek approximációja

A jelek előző pontbeli modellje egy interpolációs problémaként értelmezhető,
melyet módosíthatunk approximációs problémára. Ez esetben olyan, adott S függ-
vényosztályból származó $f^* \in S$ modellfüggvényt keresünk, amely valamely (pl.
legkisebb négyzetes) értelemben legjobban közelíti az \mathbf{x} diszkrét jelünket, azaz

$$f^* \in \arg \min_{g \in S} \|\mathbf{x} - \mathbf{g}\|,$$

ahol $\|\cdot\|$ a \mathbb{K}^{n+1} tér adott normája. Hasonló approximációs feltételt fogalmazhatunk
meg az f folytonos jelre is. Ha feltesszük, hogy a folytonos jelünk egy $(H, \|\cdot\|)$
normált tér eleme, akkor kereshetjük a legjobban közelítő $f^* \in S$ modellfüggvényt
az adott $S \subset H$ függvényosztályból, azaz

$$f^* \in \arg \min_{g \in S} \|f - g\|,$$

ha ez a minimum létezik. A leggyakrabban az $L_w^2[a, b]$ vagy $L_w^2(\mathbb{R})$ Hilbert-teret, és
annak zárt altereit tekintjük mint függvényosztályt. Adott $I \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum, és
 $w : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ mérhető súlyfüggvény esetén $L_w^2(I)$ az I intervallumon a w súlyfüggvény

szerint négyzetesen (Lebesgue-)integrálható függvények tere, azaz

$$f \in L_w^2(I) \iff \int_I |f|^2 \cdot w < \infty \quad (f : I \rightarrow \mathbb{K}), \quad (1.1)$$

az

$$\langle f, g \rangle = \int_I f \cdot \bar{g} \cdot w \quad (f, g \in L_w^2(I))$$

skaláris szorzattal, és az ebből indukált

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\int_I |f|^2 \cdot w \right)^{1/2} = \|f\|_2 \quad (f \in L_w^2(I))$$

normával. Az approximációelmélet eredményei alapján ekkor biztosítani tudjuk a (legkisebb négyzetes értelemben) legjobban közelítő elem létezését és egyértelműségét, az ortogonális felbontást, és a Fourier-sorokat, a következőkben bemutatott módon. Megjegyzendő, hogy más normákban, például a végtelen normában vett egyenletes közelítés problémája is érdekes lehet, de a gyakorlati problémákhoz általában jól illeszkedik a könnyen kiértékelhető második norma, azaz a legkisebb négyzetes közelítés.

1.3.2. Hibafüggvények a jelfeldolgozásban

A továbbiakban a jelfeldolgozásban használatos abszolút és relatív hibafogalmak terminológiáját ismertetem. Tekintsük az $f \in L_w^2(I)$ folytonos, illetve $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^{n+1}$ diszkrét jelet, valamint ezek $g \in L_w^2(I)$ folytonos, illetve $\mathbf{y} \in \mathbb{K}^{n+1}$ közelítéseit. Ugyan optimalizációs szempontból általában elegendő az approximációs hiba fent definiált módon történő használata, a különböző hibafogalmak lehetőséget adnak a különböző jelek közelítéseinek összehasonlítására. Ez több alkalmazás (pl.: tömörítés, paraméterbecslés) esetén is hasznos lehet.

A leggyakrabban használt abszolút hiba az *MSE* (*mean squared error*), amely a jel és közelítésének négyzetes eltéréseivel fejezhető ki:

$$MSE(f, g) = \|f - g\|_2^2 = \int_I |f - g|^2 \cdot w \quad (f, g \in L_w^2(I)),$$

illetve

$$MSE(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{n+1} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |x_k - y_k|^2 \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^{n+1}).$$

Az MSE négyzetgyöke, ami a fenti terminológia szerint tulajdonképpen az approximációs hiba, a szakirodalomban *RMSE* (*root mean squared error*) néven található meg.

Ha az összehasonlítás alapjául szolgáló jelek intenzitása nagy különbséget mutat, akkor érdemesebb relatív hibával dolgozni. Itt a *PRD* (*percent root difference*) hibát ismertetem, amely a négyzetes hiba aránya az eredeti jel intenzitásához viszonyítva:

$$PRD(A, B) := \sqrt{\frac{MSE(A, B)}{MSE(A, 0)}} = \frac{\|A - B\|_2}{\|A\|_2} \quad (A, B \in L_w^2(I) \text{ vagy } \mathbb{K}^{n+1}; A \neq 0),$$

azaz

$$PRD(f, g) := \frac{\|f - g\|_2}{\|f\|_2} = \sqrt{\frac{\int_I |f - g|^2 \cdot w}{\int_I |f|^2 \cdot w}} \quad (f, g \in L_w^2(I); f \neq 0 \in L_w^2(I)),$$

illetve

$$PRD(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^n |x_k - y_k|^2}{\sum_{k=0}^n |x_k|^2}} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^{n+1}; \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{K}^{n+1}).$$

Mivel $\|\cdot\|_2$ nem invariáns a jel értékeinek eltolására, a PRD helyett indokolt lehet a normalizált *PRDN* használata:

$$PRDN(A, B) := \frac{\|A - B\|_2}{\|A - \tilde{A}\|_2} \quad (A, B \in L_w^1(I) \cap L_w^2(I) \text{ vagy } \mathbb{K}^{n+1}; A \neq \tilde{A}),$$

ahol \tilde{A} itt az A jel átlaga, azaz

$$\tilde{f} := \int_I f \cdot w \quad (f \in L_w^1(I)),$$

illetve

$$\tilde{\mathbf{x}} := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{K}^{n+1}).$$

A jelfeldolgozás gyakran használt hibafogalma a *jel-zaj arány* (*SNR – signal-to-noise ratio*), amely az eredeti jel és a hozzáadódott zaj energiájának az aránya. Az előzőektől kicsit eltérően most tekintsük az $f \in L_w^2(I)$ folytonos, illetve $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^{n+1}$ diszkrét jelek $f = f_0 + f_{zaj}$, illetve $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_{zaj}$ dekompozícióját, ahol $f_0, f_{zaj} \in L_w^2(I)$ és $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{zaj} \in \mathbb{K}^{n+1}$ az eredeti jelet, illetve a hozzáadott zajt reprezentálják. Ekkor a jel-zaj arány

$$SNR(A) := \frac{\|A_0 - \tilde{A}_0\|_2^2}{\|A_{zaj} - \tilde{A}_{zaj}\|_2^2} \quad (A, B \in L_w^1(I) \cap L_w^2(I) \text{ vagy } \mathbb{K}^{n+1}; A_{zaj} \neq \tilde{A}_{zaj}).$$

A gyakorlatban, megfelelő modellből származó $g \in L_w^2(I)$, illetve $\mathbf{y} \in \mathbb{K}^{n+1}$ közelítések mellett, a jel-zaj arány becslése a $f_0 := g$, $f_{zaj} := f - g$, illetve $\mathbf{x}_0 := \mathbf{y}$, $\mathbf{x}_{zaj} := \mathbf{x} - \mathbf{y}$ megfeleltetések alapján lehetséges.

1.3.3. Hibafüggvények a képfeldolgozásban

Az előző pontban bevezetett hibafogalmak általánosságban alkalmazhatóak képfeldolgozásban is, két megjegyzéssel. Az egyik az ún. *képmínőséget mérő metrikák* (lásd 5.5. *Képmínőségmérési módszertan*), melyeket a hibafüggvények helyettesítésére, a valós érzékelhető képmínőség jellemzésére kerültek bevezetésre. A másik megjegyzés az SNR alternatív értelmezése, és a hasonló felépítésű *kontraszt-zaj arány* (*CNR – contrast-to-noise ratio*) bevezetése. Ehhez, ha értelmezhető, tekintsük a kép *hátterét* és *előterét*, azaz értelmezési tartományának alkalmas régióra történő leszűkítésével kapott \mathbf{X}_{bg} és \mathbf{X}_{fg} jeleket. Ekkor

$$SNR(\mathbf{X}_{bg}, \mathbf{X}_{fg}) := \frac{\tilde{\mathbf{X}}_{fg}}{\|\mathbf{X}_{bg} - \tilde{\mathbf{X}}_{bg}\|_2}, \quad CNR(\mathbf{X}_{bg}, \mathbf{X}_{fg}) := \frac{|\tilde{\mathbf{X}}_{fg} - \tilde{\mathbf{X}}_{bg}|}{\|\mathbf{X}_{bg} - \tilde{\mathbf{X}}_{bg}\|_2}$$

$$(\mathbf{X}_{bg}, \mathbf{X}_{fg} \in L_w^1(I) \cap L_w^2(I) \text{ vagy } \mathbb{K}^{n+1}; \mathbf{X}_{bg} \neq \tilde{\mathbf{X}}_{bg}).$$

1.4. Hilbert-térbeli approximáció

Az alfejezetben a Hilbert-térbeli approximáció kapcsolódó eredményeiről adok áttekintést, a transzformációs módszerek megalapozása céljából. A motivációt az előző alfejezet modellezési irányelvei adják, vagyis hogy a diszkrét jelünket modellező folytonos függvényt az $L_w^2(I)$ Hilbert-tér, illetve valamely alterének elemeként keressük.

1.4.1. Approximáció és Fourier-sorok

Általánosan tárgyalva a problémakört, tekintsük a $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbert-teret adott alaphalmazzal és skaláris szorzattal. Jelölje $\|\cdot\|$ a skaláris szorzat által indukált normát:

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad (f \in H).$$

Ha a tér szeparábilis, azaz létezik egy $e_k \in H$ ($k \in \mathfrak{N}$) zárt ortonormált rendszer (\mathfrak{N} egy legfeljebb megszámlálható halmaz), akkor a *Riesz-Fischer-tétel* alapján minden $f \in H$ eleme kölcsönösen egyértelműen előállítható az (e_k) rendszer szerinti Fourier-

sorfejtéssel:

$$f = \sum_{k \in \mathfrak{N}} \langle f, e_k \rangle e_k = \sum_{k \in \mathfrak{N}} \hat{f}_k e_k,$$

ahol $\hat{f}_k = \langle f, e_k \rangle \in \mathbb{C}$ a Fourier-együtthatók. Az (e_k) rendszer ekkor teljes is, és a tér egy bázisa. A továbbiakban tekintsük csak az $\mathfrak{N} = \mathbb{N}$, $\mathfrak{N} = \mathbb{Z}$, illetve az $\mathfrak{N} = \{0, 1, \dots, N-1\}$ ($N \in \mathbb{N}^+$) megfeleltetéseket. Legyen $P_m : H \rightarrow H$ az m -edik Fourier-részletösszeg operátor ($m \in \mathbb{N}^+$):

$$P_m f = \sum_{k \in \mathfrak{N}, |k| < m} \hat{f}_k e_k \quad (f \in H).$$

Tekintsünk most egy $S \subset H$ zárt alteret. A *Riesz-féle felbontási tétel* alapján minden $f \in H$ elem approximálható az S altér segítségével, azaz egyértelműen létezik f -et legjobban közelítő S -beli elem:

$$\exists! f^* \in S : f = \arg \min_{g \in S} \|f - g\|,$$

valamint $f - f^* \perp S$. A tétel alapján bevezethetjük a $P_S : H \rightarrow S$ projekciós operátort, melyre $P_S(f) = f^*$ a fenti értelemben. Ha az S altér szeparábilis, $e_k \in S$ ($k \in \mathfrak{N}$) egy zárt ortonormált rendszere, akkor a projekciós operátor kifejezhető az (e_k) rendszer szerinti Fourier-sorfejtéssel:

$$P_S(f) = \sum_{k \in \mathfrak{N}} \hat{f}_k e_k.$$

Tegyük most fel, hogy a H tér szeparábilis, az S altér pedig véges dimenziós. Ekkor az S altérben létezik véges ortonormált bázis, ami kiterjeszhető H ortonormált bázisává. Legyen ez a H -beli bázis az $e_k \in H$ ($k \in \mathfrak{N}$) rendszer, S bázisa pedig az $e_k \in H$ ($|k| < m$) rendszer, valamely $m \in \mathbb{N}^+$ esetén. Ekkor $P_S = P_m$, vagyis az altér projekciós operátora megegyezik az m -edik Fourier-részletösszeg operátorral. Megfordítva, adott $e_k \in H$ ($k \in \mathfrak{N}$) esetén P_m az $e_k \in H$ ($|k| < m$) rendszer által kifeszített

$$S_m = \text{span}\{e_k \in H : |k| < m\}$$

altér projekciós operátora. Teljesül továbbá a *Parseval-egyenlőség*:

$$\|f\|^2 = \sum_{k \in \mathfrak{N}} |\hat{f}_k|^2,$$

így a részletösszegre, kihasználva, hogy $f - P_m f \perp S_m$:

$$\|f - P_m f\|^2 = \|f\|^2 - \|P_m f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k \in \mathfrak{N}, |k| < m} |\hat{f}_k|^2.$$

Tehát az approximáció hibája kifejezhető a Fourier-együtthatók segítségével.

1.4.2. Példák transzformációs módszerekre

Tekintsük az $L_w^2(I)$ szeparábilis Hilbert-teret, és az $f \in L_w^2(I)$ folytonos jelet. A transzformációs módszerek alapötlete az, hogy a jelet adott $e_k \in L_w^2(I)$ ($k \in \mathbb{N}$ vagy \mathbb{Z}) ortonormált bázis szerinti Fourier-sorfejtésének $m \in \mathbb{N}^+$ -edik részletösszegével approximáljuk, és a további feldolgozáshoz a Fourier-együtthatók alapján származtatunk jellemzőket. A részletösszegek m rendjének megválasztása történhet *a priori* vagy *a posteriori* feltételek alapján is. Előbbi esetben az adott jel figyelembe vétele nélkül, a jelről alkotott általános ismereteink, vagy a későbbi jellemzőgeneráláshoz szükséges együtthatószám alapján határozzuk meg a rendet. Utóbbi esetre példa a közelítés megfelelő pontosságának biztosítása, azaz adott $\varepsilon > 0$ -hoz keresünk olyan $m \in \mathbb{N}^+$ rendet, melyre az approximáció hibája

$$\|f - P_m f\|_2 < \varepsilon.$$

Mivel az (e_k) rendszer bázis $L_w^2(I)$ -ben, így a részletösszegek konvergálnak az eredeti függvényhez a második normában. Ezáltal tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz tudunk találni ilyen $m \in \mathbb{N}^+$ rendet.

A következőkben néhány alapvető, általánosan használt transzformációs módszert ismertetek. Mivel $I = [a, b]$ vagy $I = \mathbb{R}$, így az előbbi esetben az általánosság megszorítása nélkül az $[a, b]$ intervallumot tetszőleges megválaszthatjuk, az egyes módszerek esetén egy lehetséges, jól illeszkedő intervallumot választottam.

Trigonometrikus Fourier-transzformáció. Tekintsük az $L_w^2[-\pi, \pi]$ teret, ahol $w \equiv 1/2\pi$. A trigonometrikus rendszer az

$$e_k(t) = e^{ikt} \quad (t \in [-\pi, \pi]; k \in \mathbb{Z}), \quad (1.2)$$

rendszer, amely ortonormált bázist alkot az $L_w^2[-\pi, \pi]$ térben, azaz az

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot \bar{g} \quad (f, g \in L_w^2[-\pi, \pi])$$

skaláris szorzatra nézve. A rendszer történeti szempontból kiemelkedő jelentőségű mint az első frekvenciatérbeli felbontás, amely lehetővé tette folytonos periodikus függvények vizsgálatát speciális harmonikus függvények sorfejtéseként. A módszernek rengeteg gyakorlati alkalmazása ismert a jel- és képfeldolgozás, ezen belül az orvosi jelfeldolgozás területén is. Ugyan a módszer általánosságban jól alkalmazható a jel frekvenciatérbeli tulajdonságainak elemzésére, speciális esetekben más rendszerek hasznosabbak lehetnek. A célfeladatnak megfelelő rendszerrel esetenként jobb approximációs vagy reprezentációs tulajdonságok érhetőek el. Ezen rendszerek egyrészt ugyanazt az approximációs hibát már lényegesen kevesebb együttható hasz-

nálatával is elérik, másrészt az együtthatók relevánsabb információkat hordozhatnak a jelről.

Hermite-függvények. Tekintsük az $L^2_{\mathfrak{G}}(\mathbb{R})$ teret, ahol

$$\mathfrak{G}(t) = e^{-t^2} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (1.3)$$

a *Gauss-függvény*. A $H_k \in L^2_w(\mathbb{R})$, ($k \in \mathbb{N}$) Hermite-polinomok a \mathfrak{G} súlyfüggvényre ortogonális polinomrendszer, azaz az

$$\{1, t, t^2, \dots\}$$

rendszer \mathfrak{G} szerinti Gram–Schmidt-ortogonalizációjával kapott rendszer. Az Hermite-polinomok kiszámíthatók például az ortogonális polinomokra vonatkozó rekurziós formulák alkalmazásával:

$$\begin{cases} H_0 & \equiv 1 \\ H_1(x) & = 2x \\ H_{k+2}(t) & = 2tH_{k+1}(t) - 2(k+1)H_k(t), \quad (k \in \mathbb{N}) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Az Hermite-függvények az Hermite-polinomok \mathfrak{G} szerinti normálásával kapott függvények, azaz az

$$e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2^k k!} \sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} H_k(t) \quad (t \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{N})$$

rendszer, amely ortonormált bázist alkot az $L^2(\mathbb{R})$ térben, azaz az

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f \cdot \bar{g} \quad (f, g \in L^2(\mathbb{R}))$$

skaláris szorzatra nézve. A rendszernek számos előnyös tulajdonsága ismert, a gyakorlat szempontjából az EKG jelfeldolgozásbeli alkalmazását emelném ki: az Hermite-függvények alakja kapcsolatba hozható az EKG szívütések jellemző hullámformáival, így hatékony leírását adhatják a szívütés morfológiájának, lásd [Jan+93; Lag+00; DozKov16; Kov+17; Kov+19].

Waveletek. Tekintsünk olyan $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ függvényeket, melyek diadikus eltolásával és dilatációjával képzett

$$\psi_{jk}(t) := 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \quad (k, j \in \mathbb{Z})$$

rendszer ortonormált bázist alkot $L^2(\mathbb{R})$ -ben. Az ilyen tulajdonságú függvények az (ortonormált) *waveletek*, melyek a diszkrét wavelet-transzformáció alapját képezik. Számos wavelet és wavelet-család ismert, ezek közül kiemelném a Haar-waveletet,

valamint a Daubechies és symlet családokat, mely konstrukciók adott simasági feltételnek eleget tevő, korlátos tartójú waveletek. A gyakorlati jelentőségük abban rejlik, hogy idő- és frekvenciatérbeli információt is hordoznak a jelről. Napjainkban kiemelt népszerűségnek örvendenek, számos jelfeldolgozási, köztük EKG feldolgozási problémák esetén is hatékonyan alkalmazhatóak (lásd pl.: [Add05; YeVKCoi12]). A módszer általánosságban eredményes, azonban egyes problémák esetén más adaptív módszerek hatékonyabbak lehetnek, lásd az EKG szívütés-osztályozás problémakörét.

Racionális rendszerek. A racionális rendszereket, a trigonometrikus rendszerhez hasonlóan, az $L_w^2[-\pi, \pi]$, $w \equiv 1/2\pi$ tér bázisaként tudjuk definiálni, a komplex racionális törtfüggvényekből származtatva. A rendszer konstrukciója adaptív, melyet részletesen ismertettek a következő alfejezetekben.

1.4.3. Adaptív transzformációs módszerek

Tekintsük az $L_w^2(I)$ szeparábilis Hilbert-tér egy $e_k^\alpha \in L_w^2(I)$ ($|k| < m; m \in \mathbb{N}^+$) lineárisan független rendszerét, melynek tagjai egy $\alpha \in \Gamma$ rendszerparaméter függvényeként írhatók fel (alkalmas Γ paraméterteret tekintve). Az α paraméter rögzítése esetén ez egy hagyományos értelemben vett transzformációs módszert generál, a jelünket az (e_k^α) rendszer által generált S_m^α altérre vett P_m^α projekciós operátorral approximáljuk, az előző részekben leírt módon. A paraméterek változtatásával azonban egy adaptív, a jelhez, vagy a jelek egy halmazához illeszkedő rendszert konstruálhatunk. Ez több szempontból előnyösebb lehet, mint egy rögzített rendszer használata, mivel jobb approximációs és reprezentációs tulajdonságok érhetőek el. Az adaptív rendszer révén egyrészt ugyanaz az approximációs hiba már kevesebb együtthatóval is elérhető, másrészt a részletösszegek a jel természetes dimenziócsökkentését adják, vagyis a jel alkalmazás szempontjából releváns részleteit kiemelő reprezentációkat.

Az adaptív transzformáció alkalmazásának központi kérdése a rendszerazonosítás, azaz a rendszerparaméter adaptálása a jelhez. Erre többféle megközelítést alkalmazhatunk, a legkézenfekvőbb az approximáció hibájának minimalizálása a rendszerparaméter függvényében. Ehhez tekintsük a lehetséges rendszerparaméterek egy Γ terét, és keressük az $\alpha \in \Gamma$ paramétert úgy, hogy

$$\alpha \in \arg \min_{\beta \in A} \|f - P_m^\beta f\|$$

teljesüljön, feltéve, hogy a minimum létezik.

A módszer családot az irodalomban *variálható vetítőoperátoroknak* nevezik [Gol-Per73] alapján, mivel az (e_k^α) ($|k| < m$) rendszer által kifeszített S_m^α altér nem rögzített, hanem az α paraméter függvényében változtatható (variálható). Az α rend-

szerparaméterekre szokás nemlineáris paraméterként is hivatkozni, mivel az (e_k^α) rendszer elemei általában α nemlineáris függvényeként állíthatók elő. Ezzel szemben a Fourier-együtthatókat nevezhetjük lineáris paramétereknek, mivel a rendszer elemeiből alkotott lineáris kombináció együtthatói. A nemlineáris függés miatt a rendszerparaméter meghatározása általában egy nemlineáris optimalizációs probléma, amely numerikus módszerekkel kezelhető.

1.5. Racionális rendszerek

Az alfejezetben a munkám során az EKG szívütések modellezésére használt racionális rendszereket ismertetem, elsősorban [Sch10] alapján. A témakörnek csak vázlatos áttekintését adom, a főbb fogalmak és jelölések bevezetésére, és az alkalmazások szempontjából releváns kérdések felvetésére törekedtem, részletesebben lásd a [HeuHofWah05] könyvben. A racionális rendszereknek számos alkalmazása ismert, például rendszer- és irányításelmélet terén (lásd [BokSch98; SzabBokSch99]). Munkámmal a Numerikus Analízis Tanszéken megkezdett kutatásba kapcsolódtam be, melynek során a racionális rendszerek (és más adaptív transzformációs módszerek) orvosi jelfeldolgozásban történő alkalmazásait vizsgáltuk.

Megjegyzendő, hogy kutatásaink során, szemben a rendszer- és irányításelmélet klasszikus megközelítésével, a racionális rendszereket nem egy dinamikus rendszer átviteli függvényének leírására, hanem közvetlenül a szívütések időtartománybeli approximációjára és modellezésére alkalmaztuk, a később ismertetésre kerülő motívációk alapján. Ennek megfelelően a továbbiakban a racionális rendszereket önállóan, dinamikus rendszerek és átviteli függvények bevezetése nélkül tárgyalom, azok általános approximációs tulajdonságaira fókuszálva.

1.5.1. Alapfogalmak

A racionális függvényeket a \mathbb{D} komplex egységdiszk, illetve \mathbb{T} egységkör feletti $H^2(\mathbb{D})$, illetve $H^2(\mathbb{T})$ Hardy-terekben fogom tárgyalni. A $H^2(\mathbb{D})$ Hardy-tér olyan $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ komplex analitikus függvények tere, melyekre

$$\sup_{r \in [0,1)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^2 dt \right)^{1/2} < \infty. \quad (1.4)$$

Általánosságban, egy $f \in H^2(\mathbb{D})$ függvény majdnem mindenhol kiterjeszthető az egységkörre az

$$f(e^{it}) := \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{it}) \quad (t \in [-\pi, \pi))$$

határérték alapján. Az így generált tér a $H^2(\mathbb{T})$ Hardy-tér, amely $L^2(\mathbb{T})$ altere és maga is Banach-tér az $L^2(\mathbb{T})$ -beli

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \cdot \overline{g(e^{it})} dt \quad (f, g \in L^2(\mathbb{T}))$$

skaláris szorzatra nézve. Megmutatható, hogy $H^2(\mathbb{T})$ elemei megadhatók $L^2(\mathbb{T})$ Fourier-együtthetők alapján történő leszűkítésével: $f \in L^2(\mathbb{T})$ akkor és csak akkor lesz $H^2(\mathbb{T})$ -beli, ha a (trigonometrikus rendszer szerinti) Fourier-együtthetőire

$$\hat{f}_k = 0 \quad (k < 0)$$

teljesül. Mivel $L^2(\mathbb{T})$ és $L^2[-\pi, \pi]$ megfeleltethetőek egymásnak, így $H^2(\mathbb{T})$ és $L^2(\mathbb{T})$ speciális, valós-komplex típusú, 2π -periodikus, négyzetesen integrálható függvényeknek is tekinthetőek, amely lehetővé teszi a jelfeldolgozási problémákra történő alkalmazást.

A racionális függvények bevezetéséhez tekintsük a *racionális alapfüggvényt*, vagyis az

$$r_a(z) := \frac{1}{1 - \bar{a}z}, \quad r_{a,k}(z) := r_a^k(z) = \frac{1}{(1 - \bar{a}z)^k} \quad (z \in \mathbb{D}) \quad (1.5)$$

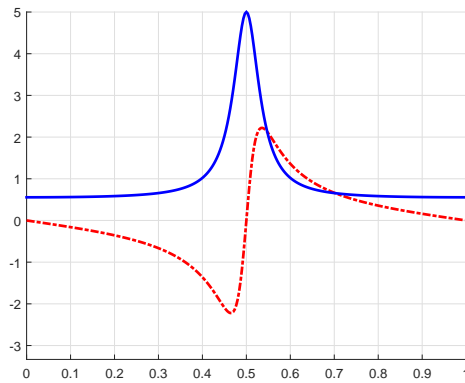
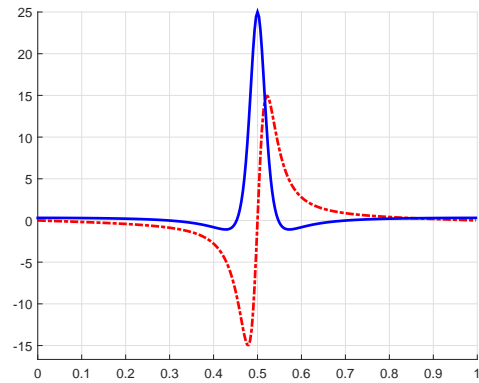
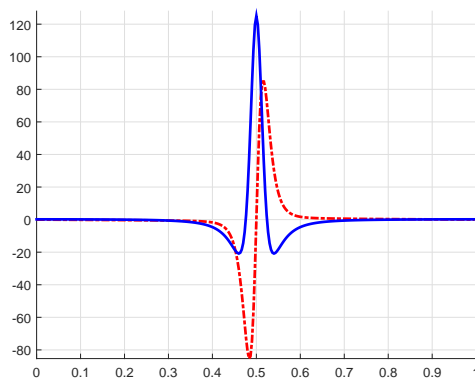
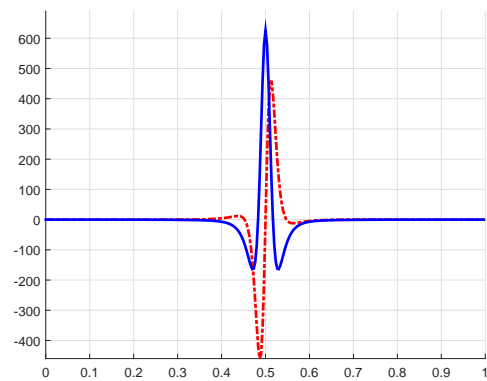
alakú komplex analitikus függvényeket, ahol az $a \in \mathbb{D}$ szabad paraméter az ún. *inverzpólus*, $k \in \mathbb{N}^+$ pedig az alapfüggvény rendje. Itt az inverzpólus megnevezést indokolja, hogy $a \neq 0$ esetben $1/\bar{a}$ a függvény pólusa a szokásos értelemben. Az $a \in \mathbb{D}$ inverzpólus abszolútértékét a továbbiakban *pólusnagyságnak*, komplex argumentumát pedig *pólusszögnek* nevezem. Az alapfüggvények segítségével előállíthatók a $\bar{\mathbb{D}}$ zárt egységdiszken analitikus, komplex együtthetős valódi racionális törtfüggvények, azaz az utóbbi halmazt \mathfrak{R}_0 -al jelölve:

$$\mathfrak{R}_0 = \text{span}\{r_{a,k} : a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}; k \in \mathbb{N}^+\}. \quad (1.6)$$

Megjegyzendő, hogy az $a = 0$ speciális esetben $r_{0,k} \equiv 1$, minden más esetben az alapfüggvények valódi racionális törtfüggvényt határoznak meg. Adott $a \in \mathbb{D}$ inverzpólus és $m \in \mathbb{N}^+$ multiplicitás esetén az alapfüggvények első m rendjének lineáris kombinációjaként előálló

$$\sum_{k=1}^m c_k \cdot r_{a,k} \quad (c_k \in \mathbb{C}; k = 1, 2, \dots, m)$$

függvényeket nevezzük *elemi racionális függvényeknek*, illetve *elemi hullámoknak*. Az $a = 0$ eset itt is speciálisan viselkedik. Mivel ekkor az összes alapfüggvény megegyezik, feltehetjük, hogy $m = 1$. Ha $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, akkor ilyen jellegű egyszerűsítést

(a) $a = 0.8, n = 1$ (b) $a = 0.8, n = 2$ (c) $a = 0.8, n = 3$ (d) $a = 0.8, n = 4$

1.1. ábra. Racionális alapfüggvények valós (kék) és képzetes (piros, szaggatott) része

nem alkalmazhatunk, egyazon inverzpólus különböző rendű alapfüggvényei lineárisan függetlenek.

A racionális függvények és rendszerek vizsgálata a $H^2(\mathbb{D})$ és $H^2(\mathbb{T})$ terekben is érdekes. A függvények $H^2(\mathbb{T})$ kiterjesztését az egységkörre történő

$$t \in \mathbb{R} \mapsto e^{it} \in \mathbb{T} \mapsto r_{a,k}(e^{it}) \in \mathbb{C}.$$

leszűkítésként tudjuk értelmezni (lásd 1.1. ábra). A jelfeldolgozási problémákra történő alkalmazásokat ezen a leszűkítésen keresztül tárgyalom a következőkben. Adott $f \in H^2(\mathbb{T})$ függvény közelítéséhez tekintsük az alapfüggvények egy

$$\{r_{a_j, k_j} : j = 1, 2, \dots, n; k_j = 1, 2, \dots, m_j\}$$

rendszerét, ahol $n \in \mathbb{N}^+$, adottak az $a_j \in \mathbb{D}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) különböző inverzpólusok, és a hozzájuk tartozó $m_j \in \mathbb{N}^+$ ($j = 1, 2, \dots, n$) multiplicitások. Itt is feltehetjük, hogy $a_j = 0$ esetén $m_j = 0$, valamint a különböző inverzpólusokhoz tartozó alapfüggvények is lineárisan függetlenek. Az f függvényt a rendszer lineáris

kombinációjával reprezentáljuk:

$$f(e^{it}) \approx \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_j} c_{jk} \cdot r_{a_j,k}(e^{it}) \quad (t \in [-\pi, \pi]),$$

ahol a közelítést legkisebb négyzetes értelemben tekintjük, $c_{jk} \in \mathbb{C}$ együtthatókkal. A fenti terminust használva az f függvényt adott inverzpólusú elemi hullámok kompozíciójaként reprezentáljuk. A közelítés megfelel a rendszer által generált

$$R_m^a := \text{span}\{r_{a_j,k_j} : j = 1, 2, \dots, n; k_j = 1, 2, \dots, m_j\} \subset H^2(\mathbb{T}) \quad (1.7)$$

altérre vett $P_m^a f$ ortogonális projekciónak, a Hilbert-térbeli approximáció alfejezetben tárgyalt módon. Az approximáció előállítható ortonormált bázis, és alkalmas biortogonális rendszer segítségével is, a későbbiekben ismertetett módon.

1.5.2. Módosított racionális függvények

A fenti alapfüggvények mellett vezessük be az $a \in \mathbb{D}$ inverzpólusú, $k \in \mathbb{N}^+$ rendű *módosított racionális alapfüggvényeket*:

$$\phi_{a,k}(z) := \frac{z^{k-1}}{(1 - \bar{a}z)^k} \quad (z \in \bar{\mathbb{D}}). \quad (1.8)$$

Az eredeti és módosított alapfüggvények rendszere $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ esetén ekvivalens, az elemi hullámok által kifizített alterek megegyeznek:

$$\text{span}\{r_{a,k} : k = 1, 2, \dots, m\} = \text{span}\{\phi_{a,k} : k = 1, 2, \dots, m\} \quad (m \in \mathbb{N}^+).$$

Ha $a = 0$, akkor a módosított alapfüggvények:

$$\phi_{0,k}(z) := z^{k-1} \quad (z \in \bar{\mathbb{D}}),$$

melyek a polinomok \mathfrak{P} rendszerét generálják:

$$\mathfrak{P} = \text{span}\{\phi_{0,k} : k \in \mathbb{N}^+\}. \quad (1.9)$$

A módosított racionális alapfüggvények segítségével tehát az összes, a $\bar{\mathbb{D}}$ zárt egységdiszken analitikus, komplex együtthatós racionális törtfüggvény előállítható, azaz az utóbbi halmazt \mathfrak{R} -rel jelölve:

$$\mathfrak{R} = \text{span}\{\phi_{a,k} : a \in \mathbb{D}; k \in \mathbb{N}^+\} = \mathfrak{P} + \mathfrak{R}_0. \quad (1.10)$$

A racionális alap- és elemi függvények segítségével történő approximációt megfogalmazhatjuk a módosított alapfüggvények segítségével is. Ekkor az

$$R_m^a := \text{span}\{\phi_{a_j, k_j} : j = 1, 2, \dots, n; k_j = 1, 2, \dots, m_j\} \subset H^2(\mathbb{T}) \quad (1.11)$$

altérre vonatkozó ortogonális projekció segítségével reprezentáljuk a vizsgált függvényt. Az eredeti alapfüggvények által kifeszített, (1.7)-ben definiált altérrel megegyező jelölést az indokolja, hogy $a_j \neq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) esetben az eredeti és módosított rendszer ugyanazt az alteret feszíti ki. A módosított alapfüggvények segítségével azonban az $a_j = 0$, $m_j > 1$ eset is értelmezhető, így R_m^a (1.11)-beli definíciója valóban az (1.7)-beli definíció kiterjesztésének tekinthető.

1.5.3. Blaschke-függvények

A Blaschke-függvények kiemelt fontosságúak a racionális transzformáció során, felhasználhatóak az ortogonális rendszer kifejezéséhez, és a diszkrét ortogonális pontrendszer generálásához. Ezen kívül más, például geometriai alkalmazásai is ismertek. Itt a főbb, és a dolgozat szempontjából releváns tulajdonságait ismertetem, további részletekért lásd például [Sch10].

A függvényeknek egy- és kétparaméteres változata is ismert. Az előbbi az $a \in \mathbb{D}$ inverzpolusú,

$$B_a(z) := \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \quad (z \in \mathbb{D}) \quad (1.12)$$

alakú racionális függvény. Utóbbinál egy $\varepsilon \in \mathbb{T}$ forgatási paramétert is bevezetünk:

$$B_{a,\varepsilon}(z) := \varepsilon \cdot B_a(z) \quad (z \in \mathbb{D}) \quad (1.13)$$

Látható, hogy az egyparaméteres változat a kétparaméteres speciális esete $\varepsilon = 1$ -re.

Geometriai szempontból a Blaschke-függvények a Bolyai–Lobacsevszkij-féle hiperbolikus geometria Poincaré-féle körmodelljének iránytartó egybevágósági transzformációi. Segítségükkel felírható a

$$\rho_0(z_1, z_2) := \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_2 z_1|} = |B_{z_2}(z_1)| \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{D}) \quad (1.14)$$

ún. *pseudohiperbolikus metrika*, amely a Poincaré-féle körmodell egy lehetséges távolságfüggvénye, azaz (\mathbb{D}, ρ_0) hiperbolikus metrikus tér. A Blaschke-függvények a \mathbb{D} egységdiszken és a \mathbb{T} egységkörön is bijekciók, valamint a függvénykompozíció műveletére nézve csoportot alkotnak, ez az ún. Blaschke-csoport. Speciálisan, a csoport egységeleme a $B_0 = B_{0,1}$ identitás, valamint a Blaschke-függvények inverzei $B_a^{-1} = B_{-a}$, illetve $B_{a,\varepsilon}^{-1} = B_{-\varepsilon a, \bar{\varepsilon}}$ alakban írhatóak fel. Megjegyzendő, hogy a

Blaschke-függvények speciális Möbius-transzformációk, a Möbius-csoport egy rész-csoportját képezik.

A függvények egységkörön történő felírásához tekintsük a

$$\gamma_\rho(t) := 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1+\rho}{1-\rho} \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) \quad (t \in (-\pi, \pi)) \quad (1.15)$$

alakú függvényeket, ahol $\rho \in (-1, 1)$. Terjesszük ki az értelmezésüket a teljes valós intervallumra a

$$\gamma_\rho(\pm\pi) := \pm\pi, \quad \gamma_\rho(t + 2\pi) := \gamma_\rho(t) + 2\pi \quad (t \in \mathbb{R})$$

szabályok szerint. Látható, hogy a kapott kiterjesztés szigorúan monoton növekvő, és bijekció \mathbb{R} -en. Az $a = \rho e^{i\alpha} \in \mathbb{D}$ inverzpólusú B_a Blaschke-függvény argumentum-függvénye az egységkörön pedig

$$\beta_a(t) = \alpha + \gamma_\rho(t - \alpha) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (1.16)$$

alakban írható, azaz

$$B_a(e^{it}) = e^{i\beta_a(t)} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

A γ_ρ ($\rho \in (-1, 1)$) paraméteres függvénycsalád is csoportot alkot a függvénykompozíció műveletére nézve. Speciálisan, a csoport egységeleme a γ_0 identitás, γ_ρ inverze $\gamma_{-\rho}$, deriváltja pedig a *Poisson-féle magfüggvény*:

$$p_\rho(t) := \gamma'_\rho(t) = \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos t + \rho^2} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad (1.17)$$

$$\gamma_\rho(t) = \int_0^t p_\rho \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (1.18)$$

1.5.4. Ortogonális rendszer

Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, és (\mathbf{a}, \mathbf{m}) különböző inverzpólusok és a hozzájuk tartozó multiplicitások egy rendszere, ahol $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{D}^n$, és $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in (\mathbb{N}^+)^n$. Tekintsük a racionális alapfüggvények által generált $R_{\mathbf{m}}^{\mathbf{a}} \subset H^2(\mathbb{T})$ alteret. Az ortogonális projekció előállításához célszerű egy ortonormált rendszer keresése az altérben, amely megtehető a generáló racionális alapfüggvényeken végzett Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárással. Az eljárás eredményeképpen kapott rendszert *Malmquist-Takenaka* (MT) rendszernek nevezzük, melynek ismert explicit alakja. Az előállításához tekintsük az inverzpólusok egy $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{N-1}) \in \mathbb{D}^N$ soroza-

tát, melyre

$$N = \sum_{j=1}^n m_j,$$

és

$$m_j = \sum_{\substack{k=0 \\ b_k=a_j}}^{N-1} 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

azaz minden a_k inverzpólus a multiplicitásának megfelelő számú alkalommal szerepel \mathfrak{b} elemei között, illetve \mathfrak{b} minden eleme az eredeti \mathfrak{a} inverzpólusok közül kerül ki. A \mathfrak{b} rendszer generált MT-rendszer ekkor

$$\Phi_k^{\mathfrak{b}}(z) := \frac{\sqrt{1 - |b_k|^2}}{1 - \overline{b_k}z} \prod_{j=0}^{k-1} B_{b_j}(z) \quad (z \in \overline{\mathbb{D}}, k = 0, 1, \dots, N-1), \quad (1.19)$$

ahol B_a az $a \in \mathbb{D}$ inverzpólusú Blaschke-függvény. A $(\Phi_k^{\mathfrak{b}})$ MT-rendszer ekkor ortonormált $H^2(\mathbb{T})$ skaláris szorzatára nézve, továbbá

$$R_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{a}} = S_N^{\mathfrak{b}} = \text{span}\{\Phi_k^{\mathfrak{b}} : k = 0, 1, \dots, N-1\}. \quad (1.20)$$

Adott $f \in H^2(\mathbb{T})$ racionális approximációja tehát előállítható MT-Fourier-részletösszeg formájában:

$$P_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{a}} f = P_N^{\mathfrak{b}} f = \sum_{k=0}^{N-1} \langle f, \Phi_k^{\mathfrak{b}} \rangle \Phi_k^{\mathfrak{b}}. \quad (1.21)$$

A fenti konstrukcióval különböző inverzpólusok és multiplicitások $(\mathfrak{a}, \mathfrak{m})$ rendszere esetén tudunk MT-rendszert generálni, megfelelő \mathfrak{b} sorozat előállításával. A generált MT-rendszer viszont nem egyértelmű, a konstrukcióban a \mathfrak{b} sorozat elemei felcserélhetőek, amely megváltoztatja az MT-rendszert is. Ez a kifeszített alteret, az ortogonális projekciót és az approximációs hibát nem befolyásolja, viszont az együtthatókat igen. További hátrány, hogy az MT-függvények, az alapfüggvényekkel ellentétben nem lokalizáltak időben, amely azonban nem feltétlenül jelent tényleges problémát a gyakorlati alkalmazás során, lásd pl. a szívütések osztályozásának esetét.

Megfordítva a konstrukciót, tetszőleges $\mathfrak{b} = (b_k) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{D}$ sorozat esetén előállítható az $\Phi_k^{\mathfrak{b}} \in H^2(\mathbb{T})$ ($k \in \mathbb{N}$) MT-rendszer a fenti definícióval. Adott $N \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$S_N^{\mathfrak{b}} = R_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{a}},$$

ahol az $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ inverzpólusok a $(b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$ sorozat különböző elemei, az $\mathfrak{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ multiplicitások pedig azok előfordulásai. Az altér egy egyszerűbb konstrukcióval is előállítható. Definiáljuk a \mathfrak{b} sorozat elemeinek lokális

multiplicitását, azaz az adott elem azt megelőző előfordulását:

$$m_k^* := \sum_{\substack{j=0 \\ b_k=b_j}}^k 1 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$S_N^b = \text{span}\{\phi_{b_k, m_k^*} : k = 0, 1, \dots, N-1\}.$$

A (Φ_k^b) MT-rendszer pontosan akkor ortonormált bázis a $H^2(\mathbb{T})$ térben, ha teljesül a

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (1 - |b_k|) = +\infty$$

ún. Blaschke-feltétel. Ekkor tehát tetszőleges $f \in H^2(\mathbb{T})$ függvény előállítható az MT-Fourier-sora segítségével, amely biztosítja számunkra a tetszőleges approximációs pontosság elérését, a pólusszám esetleges növelésével.

Az MT-rendszer tekinthető a trigonometrikus rendszer általánosításának, tekintve a $b_k \equiv 0$ esetet, amely a trigonometrikus rendszert generálja. További nevezetes speciális esetek a *Laguerre-* és a *Kautz-rendszer*, előbbi esetén a \mathfrak{b} generátorsorozat minden eleme megegyezik: $b_k \equiv b \in \mathbb{D}$, utóbbi esetben pedig egyazon inverzpólus és annak konjugáltja generálja: $b_{2k} \equiv b \in \mathbb{D}$, $b_{2k+1} \equiv \bar{b}$ ($k \in \mathbb{N}$).

A projekciót nemcsak a fenti ortogonális rendszer segítségével állíthatjuk elő könnyen, hanem a módosított alapfüggvényekhez tartozó biortogonális rendszer segítségével is (lásd [FriSch11]). Adott $(\mathfrak{a}, \mathfrak{m})$ paraméterek alapján konstruálható egy (Ψ_{jk}) biortogonális rendszer, amely kifeszíti az alapfüggvények által generált $R_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{a}} \subset H^2(\mathbb{T})$ alteret, valamint a két rendszer biortogonális egymásra, azaz

$$\langle \phi_{a_j, k}, \Psi_{pq} \rangle = \delta_{jp} \delta_{kq} \quad (j, p = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m_j; q = 1, 2, \dots, m_p).$$

Így adott $f \in H^2(\mathbb{T})$ racionális approximációja előállítható a következő biortogonális felbontás formájában is:

$$P_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{a}} f = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_j} \langle f, \Psi_{jk} \rangle \phi_{a_j, k}.$$

1.5.5. Valós és komplex reprezentáció

A fenti sorfejtéseket a $H^2(\mathbb{T})$ térben értelmeztük, de a racionális függvényekkel történő approximáció kiterjeszhető a teljes (komplex) $L^2(\mathbb{T})$ térre. Ehhez egészítsük ki a racionális rendszerünket az alapfüggvények komplex konjugáltjaival, azaz adott

(\mathbf{a}, \mathbf{m}) különböző inverzpólusok és multiplicitások mellett tekintsük az

$$R_{\mathbf{m}}^{*\mathbf{a}} := R_{\mathbf{m}}^{\mathbf{a}} + \overline{R_{\mathbf{m}}^{\mathbf{a}}} \subset L^2(\mathbb{T}) \quad (1.22)$$

alteret, vagyis adott $f \in L^2(\mathbb{T})$ függvényt approximáljuk az

$$f(e^{it}) \approx \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_j} a_{jk} \cdot r_{a_j,k}(e^{it}) + b_{jk} \cdot \overline{r_{a_j,k}(e^{it})} \quad (t \in [-\pi, \pi))$$

lineáris kombinációval, ahol $a_{jk}, b_{jk} \in \mathbb{C}$ a legkisebb négyzetes közelítés együtthatói. A kiterjesztés hasonló az MT-rendszer esetén, ehhez tekintsünk egy, az (\mathbf{a}, \mathbf{m}) által generált $\mathbf{b} \in \mathbb{D}^N$ sorozatot, és a negatív indexű MT-függvények legyenek

$$\Phi_{-k}^{\mathbf{b}} := \overline{\Phi_k^{\mathbf{b}}} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1).$$

Ha valamely $(j = 1, 2, \dots, n)$ indexre $a_j = 0$, és b_0 -t 0-nak választjuk, akkor a kiterjesztett MT-rendszer ortonormált $L^2(\mathbb{T})$ -ben, valamint a Blaschke-feltétel teljesülése esetén bázist alkot. Az MT-Fourier-részletösszegek alakja ekkor

$$P_{\mathbf{m}}^{*\mathbf{a}} f = P_N^{*\mathbf{b}} f = \sum_{|k| < N} \langle f, \Phi_k^{\mathbf{b}} \rangle \Phi_k^{\mathbf{b}} \quad (f \in L^2(\mathbb{T})). \quad (1.23)$$

A kiterjesztés hasonlóan megtehető a biortogonális rendszerre is.

A $[-\pi, \pi)$ intervallumon értelmezett, négyzetesen integrálható valós függvények racionális rendszerrel történő approximációjához terjesszük ki azokat az egyéskörön komplex analitikus függvényekké, a *trigonometrikus konjugáltjuk*, avagy *Hilbert-transzformáltjuk* segítségével. Ehhez értelmezzük az adott $f : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L^2[-\pi, \pi]$ függvényünket mint egy $F \in H^2(\mathbb{T})$ függvény valós része, melyhez megkonstruáljuk a képzetes részt. A konstrukcióhoz tekintsük f (trigonometrikus) Fourier-sorát:

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt} = c_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k \in \mathbb{N}^+} c_k e^{ikt} \quad (t \in [-\pi, \pi)),$$

ahol $\hat{f}_k = c_k \in \mathbb{C}$ a Fourier-együtthatók, melyekre

$$c_{-k} = \overline{c_k} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Tekintsük a $\mathcal{H} : L^2[-\pi, \pi] \rightarrow L^2[-\pi, \pi]$ Hilbert-transzformációt: f trigonometrikus konjugáltja a $\mathcal{H}f : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{H}f \in L^2[-\pi, \pi]$ függvény, melyre

$$\mathcal{H}f(t) = -i \sum_{k \in \mathbb{Z}} \operatorname{sign}(k) c_k e^{ikt} = 2 \operatorname{Im} \sum_{k \in \mathbb{N}^+} c_k e^{ikt} \quad (t \in [-\pi, \pi)). \quad (1.24)$$

Ekkor az

$$F(e^{it}) := f(t) + i\mathcal{H}f(t) = c_0 + 2 \sum_{k \in \mathbb{N}^+} c_k e^{ikt} \quad (t \in [-\pi, \pi))$$

függvényre $F \in H^2(\mathbb{T})$. A kiterjesztés egy konstanstól eltekintve egyértelmű is: az összes olyan $H^2(\mathbb{T})$ -beli függvény, melynek valós része f , $F + ic$ ($c \in \mathbb{R}$) alakú. Az f függvény approximációját ekkor F approximációjának valós részeként tudjuk értelmezni:

$$f(t) \approx \operatorname{Re} \left(P_N^b F(e^{it}) \right) \quad (t \in [-\pi, \pi)). \quad (1.25)$$

Az utóbbi approximációt a trigonometrikus konjugált nélkül is felírhatjuk, az MT-függvények valós és képzetes része segítségével (a $b_0 = 0$ feltevés mellett):

$$\operatorname{Re} \left(P_N^b F \right) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{N-1} \langle F, \Phi_k^b \rangle \Phi_k^b = \langle f, 1 \rangle + 2 \sum_{k=0}^{N-1} \left(\langle f, \operatorname{Re} \Phi_k^b \rangle \operatorname{Re} \Phi_k^b - \langle f, \operatorname{Im} \Phi_k^b \rangle \operatorname{Im} \Phi_k^b \right).$$

Ekkor az MT-függvények valós és képzetes részéből képzett rendszer, a trigonometrikus rendszerhez hasonlóan, a valós $L^2(\mathbb{T}) \equiv L^2[-\pi, \pi]$ terek ortogonális bázisát képezi. A rendszer az

$$\{1, \sqrt{2} \operatorname{Re} \Phi_k^b, \sqrt{2} \operatorname{Im} \Phi_k^b : k = 1, 2, \dots, N-1\}$$

normálással ortonormált is.

1.6. Radon-transzformáció

Az alfejezetben a Radon-transzformációt, főbb tulajdonságait, és alkalmazási lehetőségeit ismertetem, elsősorban [Sch04] és [Dea83] alapján. A Radon-transzformáció adja a CT képképzés matematikai modelljét, de más alkalmazásai is lehetnek, például egyenesek és körök detektálása képeken (Hough-transzformáció).

1.6.1. Alapfogalmak

A Radon-transzformációt mint síkbeli függvények integráltranszformáltját tárgyalom. Jelölje \mathcal{L} az \mathbb{R}^2 sík egyeneseseinek halmazát, és tekintsük az $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ típusú, tetszőleges egyenes mentén impropriusan integrálható függvényeket (jelölje \mathcal{S} ezen függvényhalmazt). Ekkor az $f \in \mathcal{S}$ függvény Radon-transzformáltja:

$$\mathcal{R}f(L) := \int_L f \quad (L \in \mathcal{L}). \quad (1.26)$$

Megjegyzendő, hogy a Radon-transzformációnak indokolt más, jobban kezelhető függvényosztályokon történő bevezetése is (pl.: folytonos, kompakt tartójú, Schwartz-függvények). Itt mégis az általánosabb osztályon történő bevezetést választottam, mert ekkor a Gauss-függvény, és a fantom-modellek szempontjából jelentős körlap Radon-transzformáltja is értelmezhető. Az egyes alkalmazásokhoz szükséges további megkötéseket pedig jelzem a megfelelő helyen.

A Radon-transzformáció egy lehetséges paraméterezéséhez tekintsük az egyenesek talppontjuk és normálvektoruk segítségével történő, azaz polárkoordinátás paraméterezését. Jelölje

$$\xi(\varphi) := (\cos \varphi, \sin \varphi) \in \mathbb{R}^2 \quad (\varphi \in [-\pi, \pi)) \quad (1.27)$$

az x -tengellyel φ szöveget bezáró egységvektort, és legyen az egyenes normálvektora $\xi(\varphi)$ és $r \in \mathbb{R}_0^+$ az origótól vett távolsága. Ekkor az egyenes irányvektora

$$\xi(\varphi + \pi/2) = (-\sin \varphi, \cos \varphi),$$

egy lehetséges paraméterezése pedig

$$L_{r,\varphi}(t) := r\xi(\varphi) + t\xi(\varphi + \pi/2) = (r \cos \varphi - t \sin \varphi, r \sin \varphi + t \cos \varphi) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

A Radon-transzformált alakja ezen $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_0^+ \times [-\pi, \pi)$ paraméterezés mellett:

$$\mathcal{R}f(r, \varphi) := \mathcal{R}f(L_{r,\varphi}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(L_{r,\varphi}(t)) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(r \cos \varphi - t \sin \varphi, r \sin \varphi + t \cos \varphi) dt.$$

A transzformált egy másik paraméterezéséhez terjesszük ki a fenti alakot az $r < 0$ esetre:

$$\mathcal{R}f(r, \varphi) = \mathcal{R}f(-r, \varphi + \pi) \quad (r < 0; \varphi \in [-\pi, \pi)),$$

melynek most már tekinthetjük az $(r, \varphi) \in \mathbb{R} \times [0, \pi)$ paraméterezését.

Megjegyzendő, hogy a Radon-transzformációnak elegáns előállítására adható *egységapproximáció* segítségével (lásd [Sch04]), melyet ezen dolgozatban nem tárgyalok.

1.6.2. Tulajdonságok

A továbbiakban tekintsük át a Radon-transzformáció főbb tulajdonságait. Az \mathcal{R} Radon-transzformáció operátor lineáris:

$$\mathcal{R}(f + g) = \mathcal{R}f + \mathcal{R}g, \quad \mathcal{R}(\lambda f) = \lambda \mathcal{R}f \quad (f, g \in \mathcal{S}; \lambda \in \mathbb{R}).$$

Teljesül egyfajta affin invariancia, azaz kapcsolat adható a sík affin transzformációi és a Radon-transzformáció között. Legyen $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ egy reguláris mátrix, $b \in \mathbb{R}^2$, és tekintsük az

$$A(z) := Mz + b \quad (z \in \mathbb{R}^2)$$

síkbeli affin transzformációt. Ekkor az $f \in \mathcal{S}$ függvény affin transzformációjának Radon-transzformáltja

$$\mathcal{R}(f \circ A)(r, \varphi) = \lambda \mathcal{R}f(\mu r + \langle b, \xi(\psi) \rangle, \psi)$$

alakban írható, alkalmas (M -től és φ -től függő) $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\psi \in [0, \pi)$ paraméterekkel (lásd [Sch04]). Speciálisan, tekintsük a síkbeli eltolást, azaz a

$$T_a f(z) := f(z + a) \quad (z, a \in \mathbb{R}^2)$$

transzlációoperátort, a léptékezést, azaz a

$$D_s f(z) := f(sz) \quad (z \in \mathbb{R}^2; s \in \mathbb{R}^+)$$

dilatációoperátort, és az origó körüli forgatást, azaz az

$$R_\alpha f(z) := f(r \cos(\varphi + \alpha), r \sin(\varphi + \alpha)) \quad (z = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \in \mathbb{R}^2; \alpha \in [-\pi, \pi))$$

forgatásoperátort. Ekkor

$$\mathcal{R}(T_a f)(r, \varphi) = \mathcal{R}f(r + \langle a, \xi(\varphi) \rangle, \varphi) \quad (a \in \mathbb{R}^2; r \in \mathbb{R}; \varphi \in [0, \pi)),$$

$$\mathcal{R}(D_s f)(r, \varphi) = \frac{1}{s} \mathcal{R}f(sr, \varphi) \quad (s \in \mathbb{R}^+; r \in \mathbb{R}; \varphi \in [0, \pi)),$$

és

$$\mathcal{R}(R_\alpha f)(r, \varphi) = \mathcal{R}f(r, \varphi + \alpha) \quad (\alpha \in [-\pi, \pi); r \in \mathbb{R}; \varphi \in [0, \pi))$$

teljesül. Az utóbbi tulajdonságból adódik, hogy a *radiális*, azaz csak az r polárpáraméterektől függő,

$$f(z) = F(r) \quad (z = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \in \mathbb{R}^2)$$

alakú függvények Radon-transzformáltja is radiális. Speciálisan, az \mathcal{R} operátor sajátfüggvénye a

$$\mathfrak{G}_2(z) := \mathfrak{G}(\|z\|_2) = e^{-\|z\|_2^2} \quad (z \in \mathbb{R}^2) \quad (1.28)$$

kétváltozós *Gauss-függvény*, melyre

$$\mathcal{R}\mathfrak{G}_2(r, \varphi) = \pi \mathfrak{G}_2(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \pi \mathfrak{G}(r) = e^{-r^2} \quad (r \in \mathbb{R}; \varphi \in [0, \pi)).$$

A Gauss-függvényhez kapcsolódóan érdemes megjegyezni, hogy a kétváltozós Hermite-függvények Radon-transzformáltja is kifejezhető Hermite-függvények segítségével. Ezáltal, tekintve az Hermite-rendszer teljességét, az $L^2(\mathbb{R}^2)$ -beli Radon-transzformáció természetesen kifejezhető Hermite-Fourier sorfejtéssel.

Fontos tulajdonság a *konvolúció* és a Radon-transzformált kapcsolata:

$$\mathcal{R}(f * g) = \mathcal{R}f * \mathcal{R}g \quad (f, g \in \mathcal{S} \cap L^1(\mathbb{R}^2)),$$

továbbá megfelelő függvényosztályokban kifejezhető a derivált Radon-transzformáltja, valamint összefüggés adható a Radon- és Fourier-transzformáció között, amely a transzformáció invertálásának az alapja.

1.6.3. Invertálás

A Radon-transzformáció invertálásához először tekintsük az $f \in L^1(\mathbb{R})$ függvény

$$\mathcal{F}f(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2\pi ixt} dt \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (1.29)$$

Fourier-transzformáltját, illetve

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) := \mathcal{F}f(-x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{2\pi ixt} dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

inverz Fourier-transzformáltját. Itt, $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$ esetén

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f = f$$

teljesül. A transzformáció kiterjeszthető az $L^2(\mathbb{R})$ térre, valamint hasonlóan definiálható többváltozós függvényekre is:

$$\mathcal{F}f(z) := \int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{-2\pi i\langle z, u \rangle} du, \quad \mathcal{F}^{-1}f(z) := \mathcal{F}f(-z) \quad (f \in L^1(\mathbb{R}^n); z \in \mathbb{R}^n).$$

Az inverz felírásához tekintsük a Radon-transzformáció három változóra történő

$$\mathcal{R}f(z) := \frac{1}{z_0} \mathcal{R}f\left(\frac{r}{z_0}, \varphi\right) \quad (f \in \mathcal{S}; z = (z_0, r \cos \varphi, r \sin \varphi) \in \mathbb{R}^3)$$

kiterjesztését. Jelölje

$$\mathcal{F}_0f(z) := \int_{\mathbb{R}} f(t, z_1, z_2)e^{-2\pi iz_0t} dt \quad (z = (z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{R}^3)$$

és

$$\mathcal{F}_{12}f(z) := \int_{\mathbb{R}^2} f(z_0, u_1, u_2)e^{-2\pi i(z_1u_1 + z_2u_2)} du \quad (z = (z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{R}^3)$$

az $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$ függvény egy- és kétváltozóra leszűkített Fourier-transzformációit. Ekkor az $f \in \mathcal{S} \cap L^1(\mathbb{R}^2)$ függvény $\mathcal{R}f$ Radon-transzformáltjából történő rekonstrukciója $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ teljesülése esetén az

$$f(z) = \mathcal{F}_{12}^{-1} \mathcal{F}_0 \mathcal{R}f(1, z_1, z_2) \quad (z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2)$$

inverzformula segítségével lehetséges.

1.6.4. Szűrt visszavetítés

A fenti inverzformula polártranszformációjával az ún. *szűrt visszavetítés* módszert kapjuk. Jelölje most

$$\mathcal{F}_1 F(r, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} F(t, \varphi) e^{-2\pi i r t} dt \quad (r \in \mathbb{R}; \varphi \in [0, \pi))$$

az $F \in L^1(\mathbb{R}^2)$ függvény polárkoordinátás paraméterezésének sugár szerinti Fourier-transzformáltját. A szűrt visszavetítés egy alkalmas felüáteresztő szűrővel végzett szűrés, és egy visszavetítési operátor alkalmazásaként írható fel. Alakja az inverzformula fenti feltételei mellett:

$$f = \mathcal{R}^* \mathcal{F}_1^{-1}(v \cdot \mathcal{F}_1 \mathcal{R}f),$$

ahol az

$$\mathcal{R}^* f(x, y) = \int_0^\pi f(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) d\varphi \quad (f \in L^1(\mathbb{R}^2); x, y \in \mathbb{R})$$

ún. *visszavetítési operátor* \mathcal{R} adjungáltja, és

$$v(r, \varphi) := v(r) := |r| \quad (r \in \mathbb{R}; \varphi \in [0, \pi))$$

a felüáteresztő szűrő frekvenciatérbeli alakja.

A szűrt visszavetítés megfelelően diszkrétizált változata a Radon-transzformáció CT képalkotási gyakorlatban legelterjedtebb invertálási (rekonstrukciós) módszere. A hatékonysága abban rejlik, hogy szűrés és visszavetítés egymás után végezhető, a szűrés lépést az egész felvételre végrehajtva, majd a visszavetítést csak a keregett koordinátákon. Hátránya, hogy a pontos rekonstrukcióhoz egy nem realizálható felüáteresztő szűrő szükséges, amely ráadásul a rögzítés során megjelenő zajt is felerősíti.

1.6.5. CT alkalmazás

A CT képrögzítés (lásd 5.1. *CT feldolgozás*) során keletkező nyers felvétel a Radon-transzformált egy mintavételezésének feleltethető meg, így a Radon-transzformáció alapján történő rekonstrukcióhoz a folytonos formulák diszkretizálása szükséges. A diszkretizálás egy természetes módja adódik a szűrt visszavetítésből. Tekintsük $(r, \varphi) \in \mathbb{R} \times [0, \pi)$ vagy $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_0^+ \times [-\pi, \pi)$ paraméterpár egyenletes mintavételezését, és ekkor a szűrés közelíthető diszkrét Fourier-transzformált, a visszavetítés pedig integrálközelítés segítségével. A CT eszköz működését tekintve ez axiális felvételezési módnak, egy körbefordulás alatt adott elfordulási lépésközönként, párhuzamos röntgensugarakkal történő pásztázásnak felel meg. Az első CT generáció eszközei közvetlenül ezen mintavételezést követték, az újabb generációk esetén azonban a sugarak átrendezése, egyenletes mintavételezésnek megfelelő interpolációja, vagy a formulák más diszkretizálása szükséges a szűrt visszavetítés alkalmazásához.

A szűrt visszavetítés v szűrőjének közelítéséhez tekintsük a *rámpa*, avagy *Ram-Lak* szűrőt, amely az abszolútérték-függvény leszűkítése, a sugárirányú diszkretizálásból adódó $f \in \mathbb{R}^+$ Nyquist-frekvenciának megfelelően:

$$v_f(r) := \chi_{[0, f]}(|r|) \cdot |r| \quad (r \in \mathbb{R}).$$

Mivel ez a közelítés egy téglalapablakkal történő szűrésnek feleltethető meg, a gyakorlatban ezt általában más aluláteresztő szűrővel helyettesítik:

$$v_w(r) := w(r) \cdot |r| \quad (r \in \mathbb{R}),$$

ahol $w \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy alkalmas ablakfüggvény. Ez a szinogram rekonstrukció előtti zajszűrésének tekinthető, mely révén csökkenthető a v szűrő zajt felerősítő hatása, illetve kiküszöbölhetőek a téglalapablak negatív hatásai. A rekonstrukció viszont így elméletileg sem pontos, amely új artifaktumok megjelenését okozhatja a rekonstruált képen. A leggyakrabban megjelenő ablakfüggvények a sinc-függvény (Shepp–Logan ablak), a koszinuszablak, a Hamming- és Hann-ablak.

1.6.6. Iteratív rekonstrukciós módszerek

A Radon-transzformáció invertálásának gyakorlatban elterjedt alternatívái az iteratív rekonstrukciós módszerek (lásd [Gey+15]). Ezen algoritmusok, a szűrt visszavetítéssel ellentétben nem közvetlen módon számítják a rekonstruált képet, hanem egy kezdeti becslés alapján végzett iterációval közelítik azt. Az iteratív rekonstrukció általános módszertana a következő:

0. Adott szempontoknak megfelelő kezdeti becslés választása aktuális képként.

1. Az aktuális kép *előrevetítése*: szinogram előállítás Radon-transzformációval, a rögzítőeszköz működésének megfelelően.
2. A rekonstruálandó és az aktuális szinogramok összehasonlítása, korrekció végrehajtása az aktuális képen.
3. Kilépési feltétel ellenőrzése, 1-2. lépések iterációja.

Műveletigénye jellemzően jóval nagyobb a szűrt visszavetítéshez képest, a 2. lépés például sokszor egy beágyazott visszavetítést is tartalmaz. Az alapvetően nagyobb műveletigény ellenére egyes problémák hatékonyabban kezelhetők iteratív technikákkal, révén csökkenthető a kvantálási zaj, valamint a korrekciós lépés során külső információk (fizikai, technikai, fiziológiai modellek) figyelembe vétele is könnyedén lehetséges (*modell-alapú iteratív rekonstrukció*).

1.7. Osztályozás, klaszterezés, gépi tanulás

A következőkben a munkám során alkalmazott osztályozási és klaszterezési algoritmusokról adok rövid áttekintést. A céloom vázlatosan ismertetni az osztályozás és klaszterezés általános feladatát, és a vizsgált algoritmusok működését, a későbbi fejezetekben szereplő alkalmazásokhoz. Megjegyzendő, hogy sem az algoritmusok részletes működését, sem a gépi tanulás során fellépő további nehézségeket nem tárgyalom. Bővebb szakirodalmi áttekintéshez lásd [Mit97; Bis06].

Az *osztályozás* és *klaszterezés* célja adott objektumok adott szempontok szerinti kategóriákba történő sorolása. Matematikai szempontból az objektumok jellemzőik egy $v \in \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) vektorával (*jellemzővektor*) adottak. A továbbiakban az osztályozás megnevezést arra az esetre alkalmazom, amikor az objektumokat adott referenciaadatok szerint, az azokhoz mért hasonlóság alapján kívánjuk kategóriákba sorolni. A klaszterezés megnevezést pedig akkor használom, ha a vizsgált objektumok közötti hasonlóság alapján kívánunk kategóriákat létrehozni. Előbbi esetben ismertnek tekinthetjük az osztályok számát, és feltehetjük, hogy a referenciaadatok a vizsgált objektumoknak megfelelő jellemzővektorokkal, valamint osztálycímkékkkel rendelkeznek.

A *gépi tanulás* algoritmusok és modellek egy széles osztályát foglalja magába, melyek általános célja mintaillesztési feladatok elvégzése. Jelen dolgozatban az *irányított* gépi tanulást vizsgálom osztályozási feladatokra, és az *irányítatlan* tanulást klaszterezési célra. Általános működését tekintve az irányított tanulás egy tanulási és kiértékelési fázisra osztható. A tanulás adott tanítóhalmaz alapján történik, melynek elemei jellemzővektorokkal (bemenet), és osztálycímkéikkel (kimenet) adottak, vagyis a fenti referenciaadatoknak felelnek meg. A tanulási lépés a tanítóhalmaz alapján, a kiválasztott módszernek megfelelő modellépítés, melynek célja a tanító-

adatok kimenetének predikciója a bemenete alapján. Matematikai szempontból ez egy, a tanítóhalmaz alapján adott pontokban ismert $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}$ függvény adott módszerrel történő interpolációjának, illetve approximációjának tekinthető (a címkéket \mathbb{N} elemeinek feleltetve meg), és a módszertől függően jellemzően felírható numerikus optimalizálási problémaként. A kiértékelés fázisban a vizsgált teszhalmaz kiértékelése következik, mely a jellemzővektorokkal adott bemenethez a felépített modell szerinti kimenet hozzárendelését, azaz osztálycímkék predikcióját jelenti. Az irányítatlan tanulás során nem áll rendelkezésre címkézett tanítóhalmaz, a kategóriákba sorolás alapja a adathalmaz bemenetének adott módszer szerinti statisztikai vizsgálata. Megjegyzendő, hogy a gépi tanulás számos más lehetősége, illetve a fenti modellek számos más változata, és részproblémája ismert és kutatott, itt az átfogó áttekintés helyett csak a dolgozat szempontjából releváns részleteket vázoltam.

Az osztályozó algoritmusok fejlesztése során felmerülő főbb kérdések a vizsgálandó objektumokat megfelelő módon leíró jellemzővektorok generálása, a megfelelő osztályozó módszer kiválasztása, és paramétereinek optimális meghatározása. Ha az algoritmus fejlesztésekor rendelkezésre áll objektumok egy címkézett halmaza, akkor a módszer tesztelésének bevett gyakorlata ezen adathalmaz két részre, diszjunkt tanító- és teszhalmazra történő osztása. Ekkor, a tanított gépi tanulást a tanítóhalmazon végezve és a teszhalmazon kiértékelve, a teszhalmaz predikciói összehasonlíthatók az adathalmaz eredeti osztálycímkéivel, így vizsgálható az elért osztályozási pontosság, amely lehetővé teszi a javasolt módszer hatékonyságának jellemzését. Megjegyzendő, hogy kérdéses az adathalmaz megfelelő szétosztása, melynek során figyelembe lehet venni az egyes osztályok eloszlását is. Tekintsünk most az osztályozási hatékonyságot jellemző mérőszámokat, melyhez jelölje $C \in \mathbb{N}^+$ az osztályok számát, $N \in \mathbb{N}^+$ a teszhalmaz elemeinek számát, $x, y \in \mathbb{N}^N$ pedig a valódi és prediktált osztálycímkéket. Az osztályozás teljes pontossága a helyesen osztályozott elemek aránya:

$$Acc := \frac{\sum_{x_j=y_j} 1}{N}.$$

Az egyes osztályokra vonatkozó osztályozási hatékonyság vizsgálatához vezessük be az adott $k = 1, 2, \dots, C$ osztályra vonatkozó helyes és helytelen predikciók, vagyis a valódi pozitív (TP – *true positive*), valódi negatív (TN – *true negative*), álpozitív (FP – *false positive*), és álnegatív (FN – *false negative*) találatok számát:

$$\begin{aligned} TP_k &:= \sum_{x_j=y_j=k} 1, & TN_k &:= \sum_{x_j \neq k, y_j \neq k} 1, \\ FP_k &:= \sum_{x_j \neq k, y_j = k} 1, & FN_k &:= \sum_{x_j = k, y_j \neq k} 1. \end{aligned}$$

Ezek alapján bevezethetjük az egyes osztályok *szenzitivitás* és *pozitív prediktivitás* értékeit, melyek az adott osztállyal kapcsolatos predikciókat jellemzik:

$$Se_k := \frac{TP_k}{TP_k + FN_k}, \quad +P_k := \frac{TP_k}{TP_k + FP_k}.$$

Kiemelendő még *konfúziós mátrix*, amely a valódi címkék és predikciók közötti találatok számát szemlélteti, $Q \in \mathbb{N}^{C \times C}$ -vel jelölve

$$q_{k\ell} := \sum_{x_j=k, y_j=\ell} 1 \quad (k, \ell = 1, 2, \dots, C).$$

A konfúziós mátrix ismeretében egyébként kifejezhető a pontosság a diagonális elemek segítségével, a többi mérőszám pedig a megfelelő sor és oszlop mentén.

Munkám során a *tartóvektor-gépek* (*SVM – support vector machine*) [CorVap95] és *mesterséges neurális hálók* (*ANN – artificial neural network*) [Sch15] alkalmazhatóságát vizsgáltam osztályozási feladatokra, és az SKFCM (*spatially constrained kernelized fuzzy C-means*) [ZhaChe04] módszert fejlesztettem tovább klaszterezési feladatokra. Előbbi két osztályozót azok elterjedtsége, utóbbit pedig az adott problémához illeszkedő speciális jellege miatt vizsgáltam.

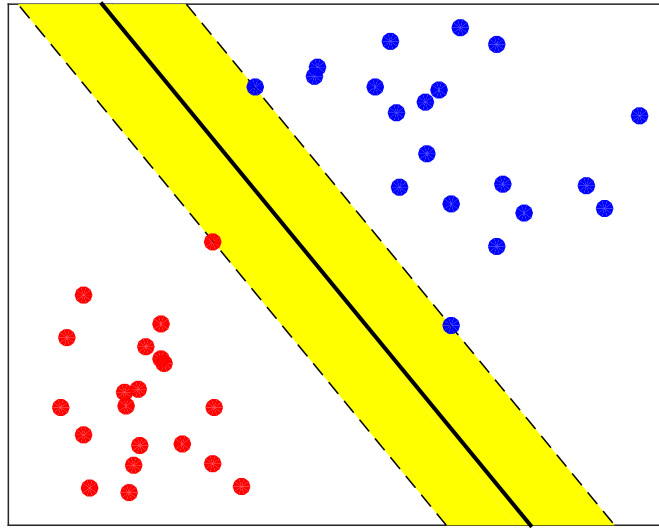
1.7.1. SVM

Az SVM [CorVap95] osztályozó alapja a vizsgált, \mathbb{R}^n jellemzővektorokkal adott objektumok két osztályba sorolása egy adott hipersík mint vágósík mentén. A megfelelő hipersík kiválasztása, ami a tulajdonképpeni gépi tanulás lépés, a tanítóhalmaz alapján történik a lehető legnagyobb vágás elérését célozva (lásd 1.2. ábra). Ez, numerikus optimalizációs problémaként megfogalmazva, a gyakorlatban gradiens típusú, vagy más heurisztikus közelítő módszerekkel kezelhető. A módszer kiterjeszhető magasabb rendű felületekkel történő vágásra egy alkalmas transzformáció segítségével, melynek hatása egy magfüggvénnyel (kernel) reprezentálható, a *kernel trükk* alapján. A gyakorlatban leggyakrabban használt magfüggvény a Gauss-függvényből származtatott *radiális bázisfüggvény* (*RBF*):

$$K(x, y) := e^{-\gamma \|x-y\|_2^2} \quad (x, y \in \mathbb{R}^n), \quad (1.30)$$

adott $\gamma \in \mathbb{R}^+$ szórási paraméter mellett.

A bináris SVM osztályozó *hiperparamétere*i a $c \in \mathbb{R}^+$ regularizációs paraméter, és a kernel paramétere, RBF esetén a $\gamma \in \mathbb{R}^+$ szórási paraméter. A hiperparaméterek, melyek közvetlenül befolyásolják az SVM hatékonyságát, valamely a priori információ, vagy a tanítóhalmazon végzett paraméterbecslés segítségével határozhatóak meg, melynek legismertebb változata a *keresztvalidáció*.



1.2. ábra. Lineáris SVM működése a síkon: bináris tanítóhalmaz (piros és kék pontok) alapján a lehető legnagyobb vágással (sárga sáv, közepén) kapott vágóegyenes (fekete)

A keresztvalidáció az adott hiperparaméter hatékonyságát vizsgálja a tanítóhalmaz egy részén tanított, és másik részén kiértékelt modell osztályozási pontossága alapján. Az S -lépéses keresztvalidációhoz tekintsük a tanítóhalmaz adott $S \in \mathbb{N}^+$ egyenlő részre osztását, majd a $k = 1, 2, \dots, S$ lépések során végezzünk tanítást a k . rész kihagyásával kapott $S - 1$ részből álló tanítóhalmazon, melyet értékeljünk ki a k . részen. Végül összegezzük az egyes lépésekben mért osztályozási pontosságot, amely a hiperparaméter adott értékét jellemezheti. A megfelelő hiperparaméter megkereséséhez végezzünk numerikus optimalizálást a lehetséges paramétertérben, a keresztvalidáció összegzett osztályozási pontosságát mint célfüggvényt felhasználva. Gyakorlati szempontból vizsgálva, a keresztvalidáció műveletigénye kifejezetten nagy lehet, amely a paramétertérbeli optimalizálás heurisztikus javításával csökkenthető. A keresztvalidáció, vagy más paraméterbecslési módszer alkalmazása azonban feltétlenül hasznos az osztályozás hatékonyságához.

Az SVM több osztályra történő kiterjesztésének több lehetősége adódik. Az egyik az *egy az egy ellen* stratégia, melynek során az egyes osztálypárok alapján tanítunk bináris SVM osztályozót, és ezek eredményét kombináljuk. Egy másik lehetőség az *egy mindenki ellen* stratégia, amikor minden egyes osztály esetén tanítunk egy bináris osztályozót, a többi osztályt egyetlen kategóriába tömörítve.

Az SVM lehetséges kimenete az osztálycímkék mellett az ún. *posterior valószínűségek*, melyek egyfajta fuzzy osztályozási információként az egyes osztályokba tartozás valószínűségeit reprezentálják, a vágásoktól vett távolság alapján származtatva.

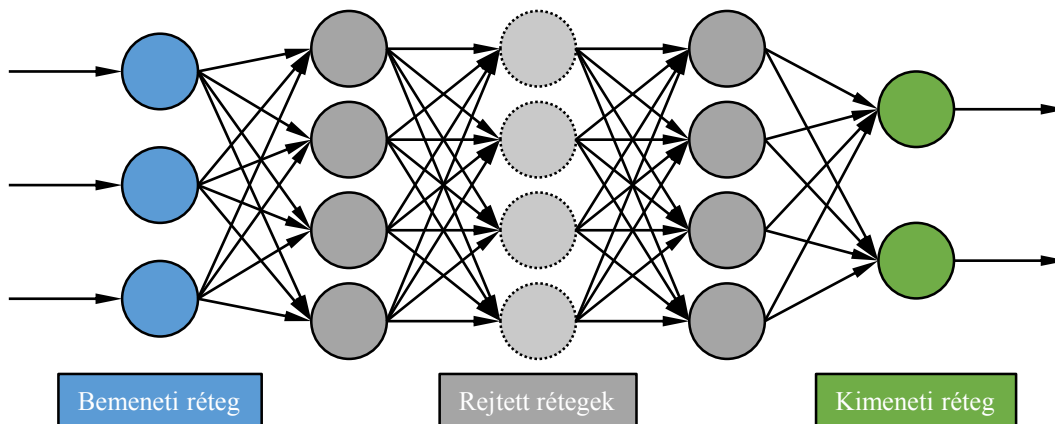
Ezen valószínűségek, az osztálycímkék predikciói mellett, szélesebb körű lehetőségeket nyújtanak például különböző technikák fúziójához.

1.7.2. ANN

A mesterséges neurális hálók [Sch15] alapötlete az emberi agy működésének imitálása, mintaillesztési feladatok megvalósítása céljából. A neurális háló alapegysége a *mesterséges neuron*, amely matematikailag egy

$$F(x) := f \left(b + \sum_{j=1}^n w_j x_j \right) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

függvényként írható le, adott $b \in \mathbb{R}$ és $w \in \mathbb{R}^n$ együtthatókkal (súlyokkal), és $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ átviteli függvénnyel. A gyakorlati megvalósításokban f jellemzően egy analitikusan jól kezelhető nemlineáris függvény, például szigmoid. Több neuron egymáshoz kapcsolásával hálózatokat képezhetünk, ahol az egymáshoz kapcsolás alatt azt értjük, hogy az egyes neuronok kimenetei fogják képezni más neuronok bemeneteit. Jelen dolgozatban csak az *előrecsatolt* hálózatokkal foglalkozom, ahol a hálózat rétegekre osztható, az egyes rétegek kimenetei képezik a következő réteg bemeneteit (lásd 1.3. ábra). Ez matematikailag egy $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ speciális nemlineáris függvényként írható le, ahol az első réteg bemenete a vizsgálandó objektum \mathbb{R}^n -beli jellemzővektora, az utolsó réteg kimenete a neurális háló \mathbb{R}^m -beli válasza, melynek további, alkalmazásspecifikus transzformációja lehet szükséges. A hálózat paraméterei tehát a rétegek száma, az egyes rétegeken belüli neuronok száma, az egyes neuronok súlyai, valamint az átviteli függvények. Matematikai szempontból az ANN univerzális függvényapproximátornak tekinthető: a többrétegű előrecsatolt hálózatok segítségével tetszőlegesen pontossággal közelíthetők az $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ folytonos függvények (lásd [Hor91]), ami az ANN mintaillesztési alkalmazásának elméleti



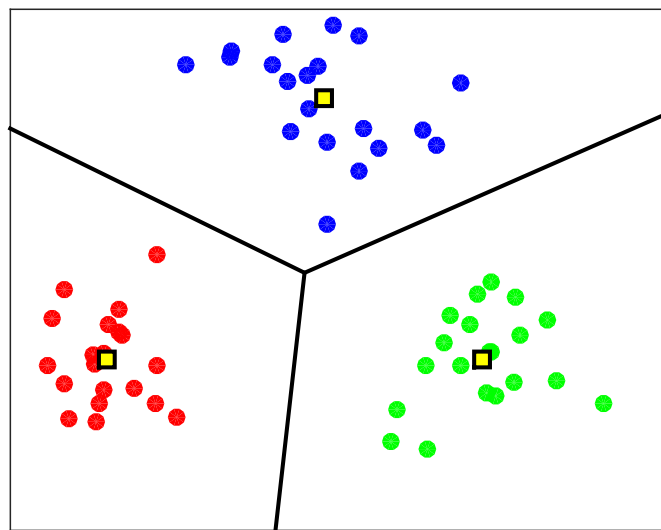
1.3. ábra. Az előrecsatolt mesterséges neurális háló szerkezete

alapját jelenti. Irányított gépi tanulás során a cél az ANN paramétereinek meghatározása a tanítóhalmaz függvényében. A hálózat topológiáját (tehát a rétegek és neuronok számát), valamint az átviteli függvényt rögzítettnek tekintve ez tehát egy approximációs probléma a súlyparaméterek függvényében. A szakirodalomban a súlyokat legtöbbször egy iteratív gradiensalapú módszerrel, a hiba-visszaterjesztésen (*backpropagation*) alapulva határozzák meg (feltételezve az átviteli függvény deriválhatóságát), a tényleges megvalósítás során különböző heurisztikák alkalmazásával. Megjegyzendő még, hogy több rejtett réteggel rendelkező ANN segítségével történő mintaillesztés szakirodalmi megnevezése a *mélytanulás* (*deep learning*), amely napjaink egyik legkutatózottabb területe.

1.7.3. SKFCM

Az SKFCM bevezetéséhez tekintsük először a K-közepek [Llo82] működését, adott $\{x_j \in \mathbb{R}^n : j = 1, 2, \dots, N\}$ teszhalmaz esetén. A K-közepek alapötlete a jellemzővektorok \mathbb{R}^n térbeli felosztása azok területi elhelyezkedése szerint. A klaszterek számát $C \in \mathbb{N}^+$ -ként rögzítve tekintsünk azok $v_k \in \mathbb{R}^n$ ($k = 1, 2, \dots, C$) referenciapontjait, és a teszhalmaz minden elemét soroljuk a legközelebbi referenciapont által meghatározott klaszterbe, azaz az osztálycímeket $y \in \{1, 2, \dots, C\}^N$ -nel jelölve:

$$y_j \in \arg \min_{k \in \{1, 2, \dots, C\}} \|x_j - v_k\|_2^2.$$



1.4. ábra. K-közepek működése a síkon, 3 klaszterrel: a kapott középpontok (sárga négyzetek), az egyes pontok klaszterei (piros-kék-zöld színezés), és a Voronoi-cellák

Megjegyzendő, hogy ez a felosztás a *Voronoi-diagram* szerinti felosztásnak felel meg (lásd 1.4. ábra). A K-közepok feladata tehát olyan referenciapontok keresése, amely minimalizálja a klaszterek pontjainak a referenciaponttól vett távolságát, azaz melyre

$$v \in \arg \min_{v \in \mathbb{R}^{C \times n}} \sum_{k=1}^C \sum_{y_j=k} \|x_j - v_k\|_2^2.$$

Bár az optimalizálási feladat minimuma biztosan létezik, annak meghatározása általában NP-nehez, így a gyakorlatban iteratív, heurisztikus módszereket alkalmaznak a referenciapontok meghatározására.

A K-közepok továbbfejlesztése, fuzzy kiterjesztése a C-közepok (*FCM – fuzzy C-means*) [Bez81], ahol az adott klaszterbe tartozást fuzzy értelemben, valószínűségekkel definiáljuk. Ez finomabb osztályozást, illetve a határfelületek közelében lévő elemek hatékonyabb kezelését teszi lehetővé. Tekintsük ehhez az $U \in [0, 1]^{C \times N}$ particionáló mátrixot, melyre

$$\sum_{k=1}^C u_{kj} = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

és

$$0 < \sum_{j=1}^N u_{kj} < N \quad (k = 1, 2, \dots, C)$$

teljesül. A particionáló mátrix az egyes objektumok egyes klaszterekbe tartozásának valószínűségét fejezi ki, pontosabban az u_{kj} érték az x_j elem k . klaszterbe tartozásának valószínűségét reprezentálja. A középpontokra és valószínűségekre most a

$$(v, U) \in \arg \min_{(v, U) \in \mathbb{R}^{C \times n} \times [0, 1]^{C \times N}} \sum_{k=1}^C \sum_{j=1}^N u_{kj}^m \|x_j - v_k\|_2^2.$$

minimalizálási feltétel teljesülését várjuk, ahol az $m \leq 1$ paraméter a fuzzy kapcsolat mértékét jellemzi. A feltételnek ismét iteratív megoldása lehetséges, melynek során v ismeretében U az

$$u_{kj} := \frac{\|x_j - v_k\|_2^{-2/(m-1)}}{\sum_{\ell=1}^C \|x_j - v_\ell\|_2^{-2/(m-1)}}$$

módon határozható meg. Végül a fuzzy klaszterezés alapján az x_j elem a

$$k := \arg \min_{\ell \in \{1, 2, \dots, C\}} u_{\ell j}$$

klaszterbe sorolandó.

Az FCM esetén is alkalmazható az SVM-nél tárgyalt kernel trükk, azaz tekinthetjük a bemenet egy alkalmas transzformációját, melynek hatása itt is magfüggvények-

kel reprezentálható (lásd pl. [ZhaChe02]). RBF kernelt feltételezve a minimalizálási feltétel

$$(v, U) \in \arg \min_{(v, U) \in \mathbb{R}^{C \times n} \times [0, 1]^{C \times N}} \sum_{k=1}^C \sum_{j=1}^N u_{kj}^m (1 - K(x_j, v_k))$$

alakot vesz fel, valamint U meghatározása

$$u_{kj} := \frac{(1 - K(x_j, v_k))^{-1/(m-1)}}{\sum_{\ell=1}^C (1 - K(x_j, v_\ell))^{-1/(m-1)}}$$

alapján lehetséges v ismeretében. A kernel FCM, hasonlóan az SVM kernel trükk alapú kiterjesztéséhez, lehetővé teszi a magasabb rendű határfelületek alkalmazását, amely bonyolultabb belső struktúrája teszhalmaz klaszterezését teszi lehetővé.

Az SKFCM alapötlete az, hogy ha a teszhalmazunk egy kép pixeleinek feleltethetőek meg, akkor korrelációt feltételezhetünk az egyes szomszédos pixelek klaszterei között. Speciálisan, ha a képen relatíve homogén régiók létrejöttét várjuk el a klaszterezés eredményeképpen, akkor érdemes a pixelek közötti térbeli kapcsolatot explicit beépíteni az algoritmusba. A [ZhaChe04] cikk szerzői erre egy térbeli regularizációs paraméter bevezetését javasolták, melynek segítségével a minimalizálási feltétel

$$(v, U) \in \arg \min_{(v, U) \in \mathbb{R}^{C \times n} \times [0, 1]^{C \times N}} \sum_{k=1}^C \sum_{j=1}^N u_{kj}^m \left(1 - K(x_j, v_k) + \frac{\alpha}{|N_j|} \sum_{r \in N_j} (1 - u_{kr})^m \right)$$

alakú, ahol az N_j ablak az x_j elem egy x_j -t nem tartalmazó környezete, $0 < \alpha < 1$ pedig a térbeli regularizációt szabályozó paraméter. U meghatározása ekkor

$$u_{kj} := \frac{\left(1 - K(x_j, v_k) + \frac{\alpha}{|N_j|} \sum_{r \in N_j} (1 - u_{kr})^m \right)^{-1/(m-1)}}{\sum_{\ell=1}^C \left(1 - K(x_j, v_\ell) + \frac{\alpha}{|N_j|} \sum_{r \in N_j} (1 - u_{\ell r})^m \right)^{-1/(m-1)}}$$

alapján történik az iteráció során. A módosítás tehát az α paraméter és az N_j ablak méretétől függő mértékben, a pixeljellemezők közötti kapcsolaton túl, homogén területi klaszterek létrejöttét igyekszik előállítani a képen.

2. fejezet

EKG szívütés-osztályozás

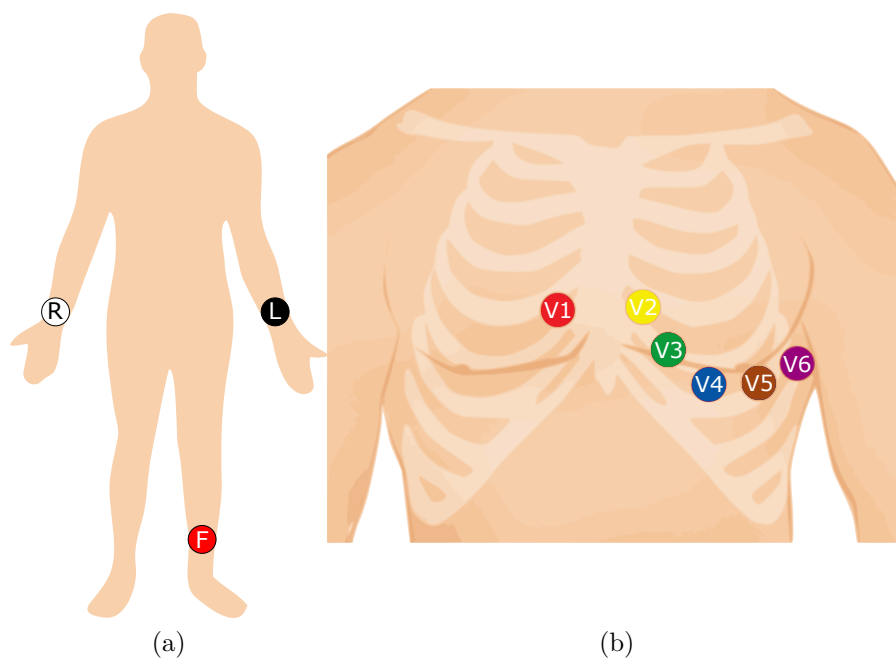
A fejezetben az EKG szívütések aritmia szerinti osztályozására kidolgozott eredményeimet mutatom be. Munkám során a szívütések 16, illetve 5 osztályba történő besorolásának kérdéseit vizsgáltam, irányított tanulás segítségével, osztály-, illetve páciens-orientált sémát követve. A szívütések modellezésére és jellemzők kinyerésére egy, a problémához illeszkedő adaptív racionális transzformációs módszert fejlesztettem ki, majd az osztályozást gépi tanulás segítségével hajtottam végre. A kidolgozott módszerek, az MIT-BIH adatbázison végzett tesztek alapján, jobban teljesítenek, mint a szakirodalom korábbi eredményei. A fejezet a [BogFri18; BogFri19a] cikkeken mint saját eredményeken alapul, illetve kitérek a [DozBogKov19] cikk eredményeire is. A cikkekben közöltekén túl részletesen ismertetem a kutatás és fejlesztés során felmerült kérdéseket és azok kezelését is.

2.1. EKG feldolgozás

Az elektrokardiogram (EKG) a legelterjedtebb neminvaszív diagnosztikai eszköz a szív működés vizsgálatára. A módszer fiziológiai háttere a szív ritmikus, kvázi-periodikus viselkedése. Normális szív működés során ugyanis hasonló lefolyású szívütések követik egymást. Az egyes szívütések a szívműködés összehangolt mozgásaként valósulnak meg, amely elektromos mezőt gerjeszt a testben. Az EKG ezt az elektromos mezőt méri a testfelületen elhelyezett elektródák segítségével. A következőkben a rögzített jelet, annak jellemzőit, és a vele kapcsolatos feldolgozási problémákat ismertetem, a [MalPlo95; Gol06] könyvekből merítve.

2.1.1. Elvezetések

A hagyományos klinikai EKG mérés során 9 elektróda kerül felhelyezésre: 1-1 a páciens két kezén és bal lábán, és 6 a mellkas adott pontjain (lásd 2.1. ábra). Az



2.1. ábra. Az EKG végtagi (a) és mellkasi (b) elvezetései

Eredeti forrása: www.wikipedia.org, www.cablesandsensors.eu

elektrodák között mért feszültségek alapján hagyományosan 12 jelet, az ún. elvezetéseket származtatjuk (I, II, III, aVR, aVL, aVF, V1, V2, V3, V4, V5, V6). Az elvezetések ismertetéséhez tekintünk az elektromos mező elektrodáknak megfelelő helyein vett potenciáljait:

- Φ_L : bal kéz (left arm),
- Φ_R : jobb kéz (right arm),
- Φ_F : bal láb (foot),
- $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_6$: mellkasi pontok.

A klasszikus, Einthoven-féle (bipoláris) elvezetéseket a végtagi elektrodák közötti feszültségként mérjük:

- $I = \Phi_L - \Phi_R$ (bal kéz – jobb kéz),
- $II = \Phi_F - \Phi_R$ (bal láb – jobb kéz),
- $III = \Phi_F - \Phi_L$ (bal láb – bal kéz).

A többi (unipoláris) elvezetéshez virtuális elektrodákat származtatunk a végtagi elektrodák potenciáljainak átlagolásával (amit technikailag az elektrodák nagy ellenállásokon keresztül történő összekötésével állíthatunk elő). A Goldberger-féle elvezetéseket adott végtagi elektroda és a másik kettő átlaga között mérjük:

- $aVR = \Phi_R - \frac{\Phi_L + \Phi_F}{2}$ (jobb kéz – többi),
- $aVL = \Phi_L - \frac{\Phi_R + \Phi_F}{2}$ (bal kéz – többi),
- $aVF = \Phi_F - \frac{\Phi_L + \Phi_R}{2}$ (bal láb – többi).

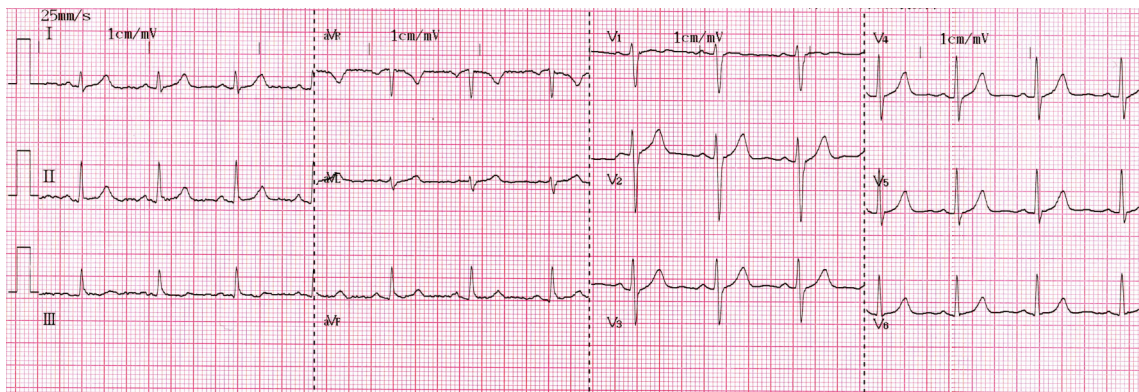
A Wilson-féle elvezetések a mellkasi elektródák és a virtuális Wilson-pont között mérjük. A Wilson-pont a három végtagi elektróda átlaga, melyet a test átlagos potenciáljának jellemzésére használhatunk:

- $\Phi_W = \frac{\Phi_L + \Phi_R + \Phi_F}{3}$ (Wilson pont),
- $V_k = \Phi_k - \Phi_W$ ($k = 1, 2, \dots, 6$).

A végtagi (Einthoven- és Goldberger-féle) elvezetések a frontális síkban mérik az elektromos teret. A 6 elvezetés valójában nem független, elméletileg bármely kettő segítségével előállítható a többi:

- $I - II + III = 0$ (Einthoven-szabály),
- $aVR + aVL + aVF = 0$,
- $I + aVR - aVL = 0$,
- $II + aVR - aVF = 0$,
- $III + aVL - aVF = 0$, stb.

A mellkasi (Wilson-féle) elvezetések a transzverzális (axiális) síkról is tartalmaznak információt. Ezen elvezetések sem függetlenek, az összesen 12 elvezetésből elméletileg 3 független választható ki.

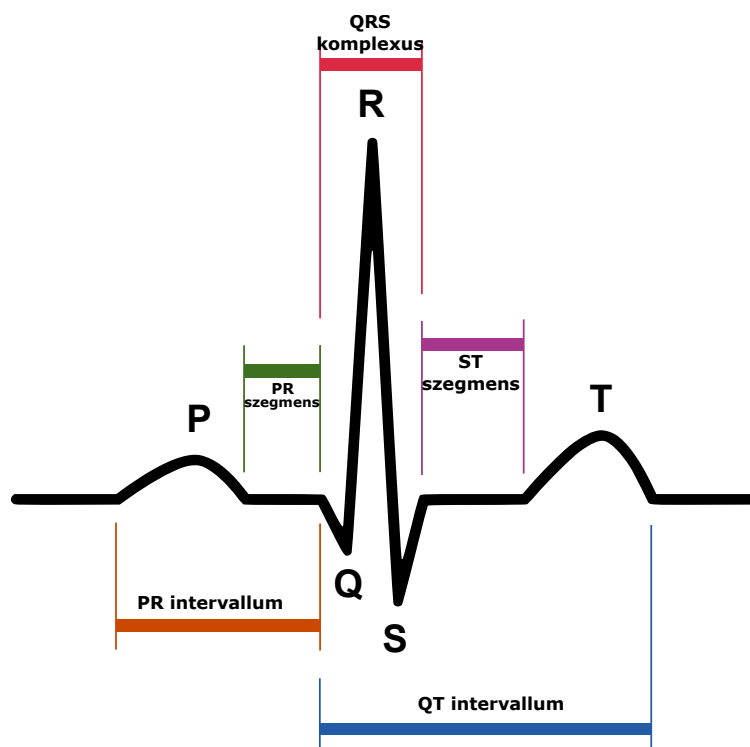


2.2. ábra. Hagyományos, 12 elvezetéses EKG, milliméterpapírra nyomtatva.

Eredeti forrása: www.wikipedia.org

2.1.2. Morfológia

Normális szinuszritmus esetén a páciensek egyes szívütései hasonló lefutású EKG jelet produkálnak, továbbá különböző páciensek szívütései között is hasonlóság mutatkozik. Valójában ezt a hasonlóságot befolyásolja a szívtengely, melynek páciensek között variabilitása hatására különböző elvezetések feleltethetők meg egymásnak. A normális szívütések EKG jeleit morfológiájuk szerint P hullámra, QRS komplexusra, és T hullámra bonthatjuk (lásd 2.3. ábra). Ezen hullámformák megfeleltethetők a pitvar és kamra régiók repolarizációjának és depolarizációjának, az ingerület szívben történő terjedését követve. Diagnosztikai szempontból releváns az egyes hullám-



2.3. ábra. Egy normális szívütés morfológiája

Eredeti forrása: www.wikipedia.org

formák alakja, amplitúdója, és hossza, az egyes hullámformák közötti szegmensek, illetve a hullámformákat magukba foglaló intervallumok hossza. Információt hordoz az egyes hullámformák jellemzőinek szívütések közötti változása, és az egyes szívütések távolsága (RR-intervallumok, szívritmus). Ezen mennyiségekből további diagnosztika mennyiségek származtathatók, például a ventrikuláris aktivációs idő (VAT), amely a QRS komplexus kezdetétől az R-csúcsig eltelt idő, vagy a szívfrekvenciára korrigált QT-hossz (QTc), amely a QT intervallum hosszát normalizálja az RR-intervallum segítségével. Abnormális szív működés, ún. aritmia esetén különböző mértékben, de akár teljesen is megváltozhat a jel morfológiája vagy dinamikája (ritmusa). A problémakört részletesebben tárgyalom a szívütések osztályozásáról és szegmentálásáról szóló fejezetekben.

2.1.3. Feldolgozási problémák

Az EKG jelfeldolgozás régóta, de napjainkban is aktívan kutatott terület. A hagyományos EKG eszközök analóg működésűek voltak, az egyes elvezetések jeleit milliméterpapíron rögzítették, amely megfelelő kalibráció esetén kvantitatív elemzéseket is lehetővé tett az orvosszakértők számára. Az analóg eszközöket mára szinte teljesen felváltották a digitális eszközök, és ezzel együtt felmerült a számítógép-vezérelt analízis, a részben automatizált feldolgozás és az orvosi kiértékelést támogató programok igénye is. A klinikai alkalmazás mellett megjelent a hétköznapi felhasználás

lehetősége, kézi- és okoseszközök elterjedésével. A „maroknyi” kézieszközök már évek óta ismertek, de az okostelefonok térnyerésével a mobil EKG fejlesztés is fellendült. A telefonnal vezeték nélküli kapcsolaton kommunikáló kézieszközök, okosórák, sőt mellények és sporteszközök jelentek meg, melyek fejlesztése folyamatosan zajlik.

A számítógép-vezérelt feldolgozás általános célja az orvosi értelmezés segítése diagnosztikai segédeszközök formájában. Ez a klinikai eszközök esetén magába foglalja a jelminőség javítását, az orvosi kiértékelésre szükséges részek kiemelését és előzetes elemzését, speciális feladatok felügyeletét (lásd pl. hosszútávú, 24 órás Holter mérések kiértékelése), és a valós idejű riasztást a páciens intenzív megfigyelése esetén. A kézi eszközök számos új problémát vetnek fel. Egyrészt az EKG jelalakok módosulhatnak a hagyományos 12 elvezetéses EKG-hoz képest, és eltérő jelminőséggel, illetve esetleges zajforrásokkal rendelkezhetnek. Másrészt megoldandó a jelek esetleges helyben, célhardveren történő szűrése, valamint okostelefon, illetve más online platform felé történő továbbítása. Feladat lehet továbbá az adatbázisban történő tárolás, illetve a jel előzetes kiértékelése a kardiológusi szakvélemény előtt, különös tekintettel az esetlegesen detektált kritikus szívelégtelenség esetén szükséges valós idejű riasztásra.

Az EKG jelfeldolgozás néhány jellemző feladata tehát a zaj és a felvételezés során fellépő artifaktumok szűrése, szívütések detektálása és a szívritmus mérése, szívelégtelenségek érzékelése (infarktusz, tachycardia, bradycardia, fibrilláció), szívritmuszavar felismerése, szívütések aritmia típusokba történő besorolása, a P, QRS, T hullámformák szegmentálása, diagnosztikai mennyiségek kinyerése (pl.: VAT, QRS hossz, QTc), statisztikai leíró mennyiségek és elemzést segítő diagramok (pl.: Poincaréplot, vektorkardiogram, lásd [Kha+13]) előállítás, valamint a jelek tömörítése. A legfőbb problémát a rosszul definiált, illetve rosszul számszerűsíthető mennyiségek jelentik. Ilyen az egyes aritmia típusokba történő besorolás, illetve az hullámformák kritikus pontjainak helye, melynek meghatározásában a kardiológusok közötti szisztematikus és véletlenszerű inkonzisztenciát tapasztalhatunk. Paradox módon ez jellemzően nem befolyásolja a diagnózist, csak a számítógép-vezérelt kiértékelés számára szükséges objektív számszerűsítés nehézségét jelzi. Ugyan számos problémára létezik hatékony, a szakirodalom és a klinikai gyakorlat által is elismert megoldás, az EKG jelfeldolgozás közel sem lezárt kutatási terület. Az eszközfelforrás hatására megjelenő új kihívások mellett az orvosi elfogadás érdekében folyamatosan szükséges a korábbi módszerek további javítása és pontosítása. A témakör aktualitását jelzik az évente megrendezésre kerülő versenyek is (lásd pl. [CIC18]), melyek során adott, klinikailag releváns probléma megoldását szorgalmazzák.

2.1.4. Zaj és artifaktumok

A felvételezés során az EKG jelek többféle torzulást szenvedhetnek, egyaránt műszaki és fiziológiai jelenségekből adódóan (lásd pl. [Fri+90]). Digitális EKG eszköz esetén a legjellemzőbb artifaktumok, azok modellezése és lehetséges szűrési eljárásai a következők:

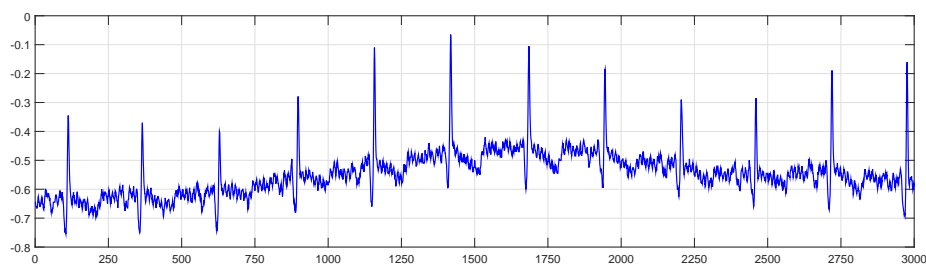
Elektromos zaj. Az elektromos rögzítőeszköz érzékelési hibája. Additív, normális eloszlású fehér zajként modellezhetjük, a hatása csökkenthető átlagoló vagy Gauss-szűrő alkalmazásával, ugyanakkor ez megváltoztathatja a jel alakját is, ami morfológiai szempontból problémás lehet.

Detektorhiba. Az elektródák érintkezési hibája. A mért érték ekkor a jeltől független, sokszor a lehetséges mérési tartományon kívül eső érték. Egyszeri detektorhibák mediánszűrő segítségével eltávolíthatók, hosszabb kiesés pótlására legtöbbször nincs szoftveres lehetőségünk (hardveres detektálás és visszajelzés, a mérés megismétlése szükséges).

Hálózati interferencia. Az elektromos rögzítőeszközben a váltóáramú hálózati tápellátás miatt fellépő interferencia. Az áramforrás névleges frekvenciájának (50-60 Hz) megfelelő szinuszhullámként jelenik meg a jelen, sávszűrővel szűrhető.

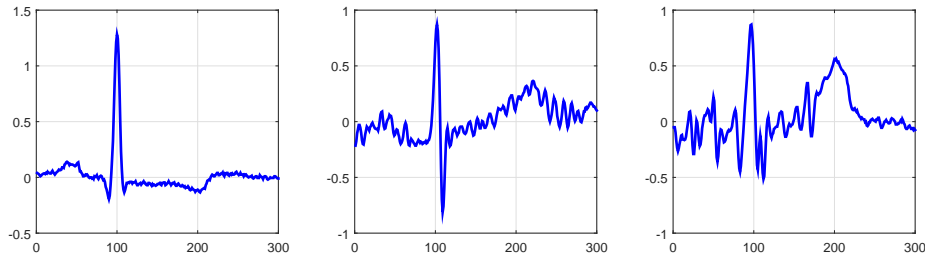
Alapvonal-vándorlás. A mérés alapvonalának, azaz a szív nyugalmi potenciálját reprezentáló szintnek a megváltozása a mérés folyamán. A jelenség háttérben a test ellenállásának megváltozása áll a különböző fiziológiai folyamatok (légzés, mozgás, stb.) hatására. A jelenség alacsony frekvenciás additív zajként modellezhető, a hatása aluláteresztő, illetve többlépcsős mediánszűrővel kompenzálható.

Az EKG feldolgozási gyakorlatban elsősorban az elektromos zajjal és az alapvonal-vándorlással kell számolni (lásd 2.4. ábra), a többi hatás szűrése jellemzően a rögzítőeszköz beépített funkciója. A 2.5. ábra a zaj egyes szívütések szintjén megjelenő hatását szemlélteti, három, különböző jelminőségű szívütés alapján. Látható, hogy a zaj érzékenyen befolyásolhatja a morfológiai ismertetőjegyeket, mint például a hullámformákat.



2.4. ábra. Elektromos zaj és alapvonal-vándorlás megjelenése EKG jeleken

Adatok forrása: MIT-BIH Arrhythmia Database



2.5. ábra. Különböző zajszintű EKG szívütések

Adatok forrása: MIT-BIH Arrhythmia Database

2.1.5. Adatbázisok

A szakirodalom számos különböző célra szánt EKG adatbázist ismer és használ, ezek legnagyobb része a PhysioNet [Gol+00] hálózaton keresztül érhető el. A munkám során két adatbázissal foglalkoztam: *MIT-BIH Arrhythmia Database* [Moo-Mar01] és a *QT Database* [Lag+97]. Az MIT-BIH aritmia-adatbázis a leggyakrabban használt tesztadatbázis, melyet a Massachusetts Institute of Technology és a Boston Isreal Hospital készített el a 1970-es évektől kezdődően. Jelenlegi formájában az adatbázis 48, egyenként 30 perces felvételt tartalmaz 47 páciensről, amely összesen több mint 100 000 egyedi szívütést jelent. Az adatbázis jelentősége a szívütésenkénti orvosi annotáció. Kardiológusok segítségével bejelölésre kerültek a szívütések helyei (R-csúcsok), az egyes szívütések aritmia típusai, illetve egyéb, a szívritmusra utaló jelzések. Az adatbázist alapvetően az aritmia vizsgálatára dolgozták ki, de ezen felül számos EKG jelfeldolgozási probléma sztenderd tesztadatbázisává vált: például szűrés, R-csúcs detektálás, tömörítés. A QT adatbázist a hullámformák kiértékelésére hozták létre, több ismert adatbázis kiválasztott felvételeinek további, részletes annotációjával. Az adatbázis 105 felvételt tartalmaz 7 adatbázisból, felvételenként 30-90 szívütést láttak el kardiológusok a P, QRS, T hullámok kezdetének, végének, és csúcspontjának helyzetére vonatkozó információkkal.

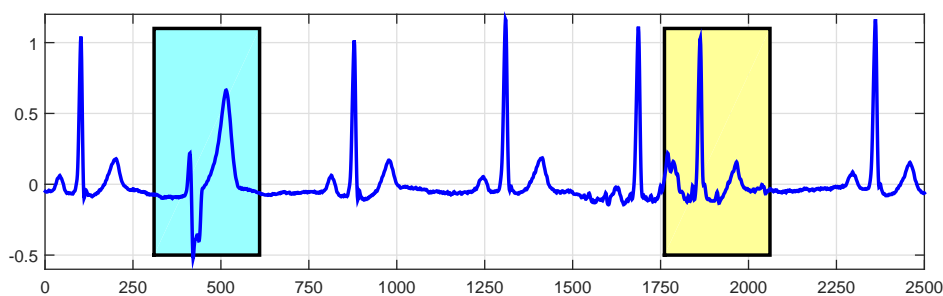
2.2. Problémafelvetés és előzmények

Az aritmia egy tág gyűjtőfogalom, amely a szív abnormális működéséből fakadó jelenségeket foglalja magába (lásd [Kas00]). Számos aritmiatípust különböztethetünk meg, ezek egy része közvetlen veszélyt jelent a páciensre nézve, szívleálláshoz vezethet, ezért megjelenésük azonnali orvosi beavatkozást tesz szükségessé. Ilyenek lehetnek egyes szívritmuszavarok: tachikardia, bradikardia, fibrilláció, melyek automatikus detektálásának kiforrott módszertana ismert, lásd például [Bar+89; Afo-Tom95; MinNakToy99]. Munkám során másik, közvetlen fenyegetést nem jelentő aritmiatípusokat vizsgáltam. Ezen aritmiák jelenléte nem feltétlenül igényel azonnali beavatkozást, de felismerésük és kezelésük fontos lehet a későbbi komplikáci-

ók elkerülése érdekében. A detektálás hasznos eszköze lehet a számítógép-vezérelt feldolgozás, amely lehetőséget biztosít a felvételek részben automatikus kiértékelésére, ezáltal segítve a kardiológusok munkáját. Az alkalmazás szempontjából kiemelendő a hosszútávú (pl. 24 órás Holter) mérések kiértékelése, amely fokozott humán erőforrás-igényű, valamint a valós idejű megfigyelés. A vizsgált aritmiák kiértékelésének lehetséges módja az egyes szívütések aritmiaosztályokba történő besorolása. Az ANSI/AAMI EC57:1998-2012 szabványok [AA12] az aritmiákat 5 fő (1 normális: N, és 4 abnormális: S, V, F, és Q), illetve egy finomabb felbontás szerint 15 osztályba sorolják. A kiértékeléshez használt MIT-BIH adatbázis egy további, szívritmusszabályzó által létrehozott osztályt is tartalmaz, azaz összesen 16-ot (lásd 2.7. táblázat).

A terület aktívan kutatott, a szakirodalom számos korábbi eredményt ismer. Ezek általános módszertana a szívütések feldolgozása, jellemzőgenerálás, és osztályozás egy gépi tanulás algoritmus segítségével. A módszerek legfontosabb lépése a jellemzőgenerálás, melynek célja a szívütések dimenziócsökkentése, azok karakterisztikus jellemzőinek kiemelése valamely matematikai és fiziológiai modell alapján. Eredménye egy jellemzővektor, mely egyrészt méretében, másrészt a kiemelt, releváns jellemzők tekintetében alkalmas egy gépi tanulás algoritmus bemeneteként történő felhasználásra. Fiziológiai szempontból az aritmia a szívritmus megváltozását, illetve a hullámformák torzulását is okozhatja (lásd 2.6. ábra), ezért gyakori megközelítés olyan jellemzővektor generálása, amely a szívritmust jellemző *dinamikus*, és a hullámformák alakját jellemző *morfológiai* jellemzők kombinációja. A következőkben a jellemzőgenerálás és osztályozás főbb korábbi eredményeit tekintem át.

A dinamikus jellemzőket az RR-intervallumokból, azaz az egymás utáni R-csúcsok között eltelt idő alapján szokásos származtatni. A korai munkák szívütésenként két RR-jellemzőt, a megelőző és rákövetkező (pre-RR és post-RR) intervallumot használtak fel, melyet [ChaODwRei04] két további jellemzővel, a lokális és átlagos RR-intervallumokkal egészített ki. Ezek a szívritmus rövid és hosszabb távú dinamikus viselkedését jellemzik. Munkám során ezen leírók [YeVKCoi12] által módosított



2.6. ábra. Morfológiai (PVC, kék, balra), és dinamikus (APC, sárga, jobbra) aritmia

Adatok forrása: MIT-BIH Arrhythmia Database

alakját használtam fel, illetve vizsgáltam az [LinYan14] által javasolt normalizált változatot a szívritmusok felvételek közti különbségeinek csökkentése érdekében.

A morfológiai jellemzők elsősorban matematikai transzformációs módszerekből származtathatóak. Ezen a téren a szakirodalmi előzmények között szerepelnek Hermite-együtthatók [Lag+00], magasrendű statisztikai jellemzők (HOS – high order statistics) [OsoHoaMar04; Lan+12], hullámforma együtthatók [ChaODwRei04; RodGonIll05; OliAndMF11], wavelet együtthatók [PraSah03; Jia+06; LlaKhaMar12; YeVKCoi12; LinYan14], független komponens analízis (ICA – independent component analysis) [Jia+06; YeVKCoi12], főkomponens-analízis (PCA – principle component analysis) [YeVKCoi12], illetve ezek kombinációja. Munkám során egy új megközelítést, az adaptív racionális transzformáció segítségével kinyerhető jellemzők alkalmazását vizsgáltam, ennek előzményeit a korábbi fejezetekben ismertettem.

A gépi tanulás algoritmusok közül is többet vizsgáltak már a területen, úgy mint mesterséges neurális hálók (ANN – artificial neural network) [PraSah03], véletlen mezők (CRF – conditional random field) [Lan+12], döntési fák (DT – decision tree) [RodGonIll05], Bayes-hálók (DBN – dynamic Bayesian network) [OliAndMF11], lineáris diszkriminancia (LD – linear discriminants) [ChaODwRei04; LlaKhaMar12; LinYan14], önszerveződő térképek (SOM – self organizing map) [Lag+00], és tartóvektor-gépek (SVM – support vector machine) [OsoHoaMar04; Jia+06; YeVKCoi12]. Jelen dolgozatban a két legeredményesebb algoritmus, az ANN és az SVM alkalmazási lehetőségeit vizsgáltam, különböző paraméterbeállításokkal.

A kidolgozott módszer kiértékelésének alapját az MIT-BIH aritmia-adatbázis képezi, mint referenciaadat. Az osztályozás a szakirodalmi előzményeket követve irányított módon, az adatbázis tanuló- és tesztalmazra bontásával történik. A kiértékelési séma szerint a módszerek két fő családba oszthatók: *osztály-* vagy *páciens-orientált* sémára. Osztály-orientált kiértékelés esetén az adatbázis kettéosztásakor nem vesszük figyelembe, hogy az egyes szívütések mely pácienshez tartoznak, csupán azok aritmiaosztályainak eloszlásai alapján készítjük el a tanító- és tesztalmazt. Ezzel szemben páciens-orientált esetben páciensenként osztjuk fel az adatbázist, és a páciensek egyes szívütései ugyanabba a halmazba kerülnek besorolásra. A gyakorlatban az előbbi séma akkor alkalmazható, ha rendelkezünk valamilyen korábbi információval az adott páciensről (korábbi diagnózis, felvételek, kórtörténet), utóbbi séma pedig azt szimulálja, hogy az algoritmusnak egy korábban ismeretlen páciens szívütéseiről kell döntést hoznia. Munkám során főként az osztály-, részben a páciens-orientált sémával foglalkoztam. Az egyes módszereket és eredményeiket a 2.3. és 2.5. táblázatban, az osztály-orientált séma tanító- és tesztalmazainak felépítését a 2.7. táblázatban foglaltam össze.

További információkért lásd a [ChaODwRei04] munkát, amely a módszertan megalapozásának tekinthető, illetve a [San+13; Luz+16] összefoglaló cikkeket.

2.3. Racionális rendszerek az EKG feldolgozásban

Munkám során az adaptív racionális transzformáció alkalmazását vizsgáltam EKG jelek modellezésére, és alkalmas, feladatspecifikus jellemzők generálására. Ennek elsődleges motivációja a racionális rendszerek EKG jelfeldolgozás szempontjából előnyös tulajdonságai:

a) *Flexibilitás*: A racionális rendszer kiemelten adaptív és flexibilis, tetszőleges számú szabad paraméter segítségével szabályozhatjuk a rendszer viselkedését.

b) *EKG reprezentációs képesség*: A gyakorlati tapasztalatok szerint a racionális alapfüggvények és elemi függvények jól illeszkednek az EKG szívütések hullámformáihoz. Megfelelő paraméterek esetén a racionális függvények hasonló alakúak, mint az EKG hullámformák, így a racionális reprezentáció együtthatói közvetlenül az EKG jelek alakja alapján határozhatóak meg. Ezáltal közvetlen kapcsolat áll fenn a reprezentáció paramétere (együtthatók és rendszerparaméterek) és az EKG jel morfológiája között, így a paraméterek közvetlen diagnosztikai információt hordoznak a szívütésekről.

c) *Időbeli lokalizáltság*: Az alapfüggvények és elemi függvények előnyös tulajdonsága az időbeli lokalizáltságuk: elsődlegesen a póluszög környékén fejtik ki hatásukat.

d) *Egyszerű kiértékelés*: A racionális rendszerek segítségével egy egyszerű, könnyen (az alapl műveletek felhasználásával) számolható, analitikus reprezentációját kapjuk az eredeti jelnek. A reprezentáció lehetővé teszi a dimenziócsökkentést, az approximáció könnyű kiértékelését, de akár a jel újramintavételezését, és függvényteni vizsgálatát is.

Az adaptív racionális transzformáció hatékonyan bizonyult számos EKG jelfeldolgozási probléma esetén. A főbb példák a tömörítés [Kov16; KovFriSch19], a szívütés-detektálás [GilKovSam14], a hullámformák szerinti szegmentálás [BogSch18; BogFri19b], valamint a szívütések osztályozása [BogFri18; BogFri19a; DozBogKov19]. A közvetlen alkalmazásokon túl több kapcsolódó témakörben is születtek eredmények, úgymint modellezési feladatok [FriSch11; Fri+12; BogSch18; Kov18; BogFri19c], és optimalizálási módszerek [Loc09; Fri+12; Loc13; KovKirGab13; Kov16; KovFriSch19]. További összefoglalásnak lásd a [Bog+19] cikket is. Megjegyzendő, hogy a racionális rendszerek más típusú fiziológiai jelek (pl. EEG) modellezésére is alkalmasak (lásd pl. [SamKovGab15; SamKovGab17]), valamint más transzformációs módszerek (pl. Hermite) is eredményesek EKG jelek modellezésére (lásd pl. DozKov16,Kov+17,Kov+19).

2.3.1. EKG elvezetések modellezése

Az EKG elvezetéseknek többféle modellje is adható racionális rendszerek segítségével. A modelleket az egyes szívütésekre alkalmazhatjuk, azaz tegyük fel, hogy az EKG jel szívütésekre történő szegmentálása előzetesen megtörtént, ennek lehetőségeire az egyes alkalmazásoknál térek ki részletesebben. Egyetlen elvezetést tekintve az EKG szívütést értelmezhetjük egy $f \in L^2[-\pi, \pi]$ valós függvény mintavételezéseként, amely (1.25) szerint modellezhető. A végtagi (Einthoven- és Goldberger-) elvezetéseket együttesen is modellezhetjük. A gyakorlati tapasztalatok ugyanis azt mutatják, hogy egyazon póluskombinációval a szívütések minden végtagi elvezetésén mért jelei hatékonyan reprezentálhatók. Az ötletet az EKG jelek tulajdonságai is alátámasztják. Technikailag, az elvezetések nem függetlenek, tetszőleges 2 lineáris kombinációjaként előállítható az összes többi. Morfológiailag, a szívütések egyes elvezetésekén mért jelei páciensenként hasonló lefutásúak, de különböző páciensek között is kapcsolatba hozhatók egymással, a páciensek szívtengelyeinek függvényében. Mindezek alapján egy szívütést modellezhetünk egy $f \in L^2(\mathbb{T})$ komplex függvénnyel, melynek az egyes elvezetésekén való megjelenése $\text{Re}(e^{i\alpha} f)$, ahol az $\alpha \in [-\pi, \pi)$ paraméter az elvezetés szívtengellyel bezárt szögét reprezentálja. A racionális modell pedig adott $\mathfrak{b} \in \mathbb{D}^N$ pólussorozat esetén

$$f_k \approx \text{Re} \left(e^{i\alpha_k} P_N^{\mathfrak{b}} f \right) \quad (k = I, II, III, aVR, aVL, aVF; \alpha_k \in [-\pi, \pi)),$$

illetve

$$f_k \approx \text{Re} \left(e^{i\alpha_k} P_N^{*\mathfrak{b}} f \right) \quad (k = I, II, III, aVR, aVL, aVF; \alpha_k \in [-\pi, \pi)),$$

attól függően, hogy f -et melyik függvénytér ($H^2(\mathbb{T})$ vagy $L^2(\mathbb{T})$) elemének tekintjük. $P_N^{\mathfrak{b}}$ és $P_N^{*\mathfrak{b}}$ itt az (1.7) és (1.23)-ban bevezetett projekciós operátorokat jelöli. Az összes elvezetést figyelembe véve a szívütések térbeli modelljének megadása is lehetséges kvaterniók, és azokra kiterjesztett racionális rendszerek segítségével, de ezeket a modelleket a dolgozatomban nem tárgyalom.

2.3.2. Adaptív racionális transzformáció

Az adaptív racionális transzformáció központi kérdése a megfelelő póluskombináció megválasztása, a fent ismertetett módon, vagyis az adott jelhez vagy jelekhez illeszkedően meghatározandó az inverzpólusok száma, multiplicitása, és tényleges értéke. A póluszválasztás során számos szempontot kell figyelembe venni, melyek a megoldandó gyakorlati feladatok esetén különbözőek lehetnek. A továbbiakban a főbb szempontokat, és a lehetséges megközelítéseket foglalom össze EKG jelfeldol-

gozási példák alapján. A gyakorlatban megvalósításra került pólusválasztási módszereket az egyes alkalmazásoknál ismertetem.

Elvárások, célfüggvény. Az első megválaszolendő kérdés az, hogy mit értünk az adott jel(ek)hez illeszkedő póluskombináción. A kérdés megvitatására approximációs és reprezentációs elvárások is megfogalmazhatóak. Approximációs szempontból olyan póluskombinációt keresünk, amely a lehető legkevesebb számú inverzpólus, illetve alacsony multiplicitás mellett jól approximálja a vizsgált jel(ek)e)t. A feladat variálható vetítőoperátorként tárgyalható: egy nemlineáris optimalizálása problémaként írható fel, megfelelő célfüggvény segítségével. Ha például az inverzpólusok $n \in \mathbb{N}^+$ számát és $\mathbf{m} \in (\mathbb{N}^+)^n$ multiplicitását rögzítettnek tekintjük, akkor a keresési tér $\Gamma = \mathbb{D}^n$. Adott $f \in L^2(\mathbb{T})$ függvény approximációs hibájának minimalizálásának feladata tehát az $\mathbf{a} \in \mathbb{D}^n$ inverzpólusok keresése, melyekre

$$\mathbf{a} \in \arg \min_{\mathbf{b} \in \mathbb{D}^n} \|f - P_{\mathbf{m}}^{\mathbf{b}} f\|_2. \quad (2.1)$$

Reprezentációs szempontból olyan póluskombináció előnyös, amely a jel az adott probléma szempontjából releváns részleteit emeli ki. EKG jelfeldolgozás esetén például érdemes megkövetelni a morfológiai szempontból pontos reprezentációt, amely mindegyik hullámformát megfelelő mértékben approximálja. Mivel a QRS komplexus amplitúdója jellemzően lényegesen nagyobb, mint a P és T hullámé, így egy adott normában megfogalmazott approximációs probléma optimális megoldása nem feltétlenül teljesíti ezt a reprezentációs elvárást. Látható tehát, hogy az approximációs és reprezentációs elvárások esetenként szemben állhatnak egymással. Az ellentét feloldása a célfüggvény vagy az optimalizáló algoritmus módosításával, súlyozással, vagy más, nem optimalizációs jellegű pólusazonosítási módszerekkel lehetséges.

Stratégia. A pólusválasztás problémájába belefoglalhatjuk a pólusszám és multiplicitások megválasztásának kérdését, illetve leszűkíthetjük csak az inverzpólusok értékének megválasztására. Utóbbi esetben a pólusszámot és multiplicitást valamilyen külső, a priori információ szerint rögzítjük. EKG szívütések esetén például előnyösnek bizonyult 3 inverzpólus használata, a P, QRS, és T hullámokhoz kapcsolódóan. Ekkor, megfelelő pólusválasztás mellett, a hullámformákat egyes elemi racionális függvényekkel tudjuk reprezentálni. A multiplicitásokat érdemesnek tűnt a P és T hullámnál azonos, kis értékre választani (1 vagy 2), a bonyolultabb morfológiájú QRS komplexusnál pedig nagyobbra (4). Az előbbi esetben, a pólusválasztást optimalizációs problémaként tárgyalva, megfelelő, a dimenzió növelését megengedő algoritmus, és módosított célfüggvény szükséges. Ugyanakkor, figyelembe véve a racionális rendszer teljességét, a pólusszám vagy a multiplicitások növelésével egyre kisebb approximációs hiba érhető el. Ezért a célfüggvényt úgy szükséges módosítani, hogy gátat szabjon a dimenzió korlátlan növelésének. A megközelítést nem alkalmaztam a munkám során, részletesebben lásd [Kov16; KovFriSch19].

Hatókör. A (2.1) minimalizálási feltételt egyetlen jelet figyelembe véve határoztuk meg. Ez a hatókör kiterjeszhető több jelre, vagyis kereshetjük az adott jelekhez együttesen illeszkedő póluskombinációt. EKG jelfeldolgozás esetén előbbi a szívütésenkénti, utóbbi pedig a páciensenkénti póluskombináció használatát jelenti, vagyis a páciens egyes szívütéseinek egyedi, illetve közös póluskombináció alapján történő reprezentációját. Mindkét lehetőség indokolt lehet az alkalmazás céljától függően. Ha a cél az egyes szívütések lehető legpontosabb reprezentációja (pl.: tömörítés, szegmentálás), akkor a szívütésenkénti, ha pedig összehasonlítható jellemzőparaméterek származtatása (pl. osztályozás), akkor a páciensenkénti pólusválasztás az indokoltabb. A tényleges kiterjesztés többféle megközelítés alapján is lehetséges, az együttműködő és a paramétertérben történő átlagolással egyaránt. Előbbi esetben terjesszük ki a hibafüggvényt jelek egy $f_k \in L^2(\mathbb{T})$ ($k = 1, 2, \dots, N; N \in \mathbb{N}^+$) sorozatára az egyes hibák összegzésével. Rögzített $n \in \mathbb{N}^+$ pólusszám és $\mathbf{m} \in (\mathbb{N}^+)^n$ multiplicitások mellett tehát keressük azon $\mathbf{a} \in \mathbb{D}^n$ inverzpólusokat, melyre

$$\mathbf{a} \in \arg \min_{\mathbf{b} \in \mathbb{D}^n} \sum_{k=1}^N \|f_k - P_{\mathbf{m}}^{\mathbf{b}} f_k\|_2. \quad (2.2)$$

A hibafüggvény kiterjesztése kapcsán felmerülhet más norma, valamint a függvények súlyozásának, illetve normalizálásának lehetősége is. Például indokolt az abszolút hibák összegzése helyett az egyes jelek közti amplitúdókülönbségekre nem reflektáló hiba, a PRD használata:

$$\mathbf{a} \in \arg \min_{\mathbf{b} \in \mathbb{D}^n} \sum_{k=1}^N PRD(f_k, P_{\mathbf{m}}^{\mathbf{b}} f_k).$$

Másik megközelítés lehet az egyes jeleket leíró póluskombinációk megkeresése, majd azok átlagolása. Itt felmerül kérdésként az inverzpólusok sorrendjének megfeleltetése, a kiugró (*outlier*) elemek szűrése, valamint az átlagolási módszer. Az euklideszi távolság szerinti átlagolás mellett szóba jöhet a hiperbolikus metrika szerinti átlagolás, illetve fedőkörök vagy ellipszisek keresése (euklideszi és hiperbolikus egyaránt).

Algoritmusok, keresési tér. A pólusazonosítást optimalizációs problémaként tekintve számos numerikus optimalizáló algoritmus alkalmazása lehetséges, viszont ezek leszűkítése, kiterjesztése, és paraméterezése számos kérdést vet fel. Legegyszerűbb példaként megemlíteném a *Monte-Carlo* módszert, azaz a keresési tér nagyszámú, véletlen mintavételezését. Alkalmazhatóak továbbá *gradiens* alapú, illetve deriváltmentes iteratív módszerek, például a *Nelder–Mead* szimplex algoritmus [NelMea65], és a részecskekeraj optimalizálás (*PSO – particle swarm optimization*) [KenEbe95]. Az egyes inverzpólusok keresési tere a \mathbb{D} egységdiszk, melyre történő leszűkítés megtehető a $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{D}$ projekció alapján, illetve az optimalizáló hiperbolikus geometriai kiterjesztésével (lásd Hiperbolikus Nelder–Mead: [Loc09; FriLocSch12; Loc13],

Hiperbolikus PSO: [KovKirGab13; Kov16; KovFriSch19], gradiens: [Kov18; KovFriSch19]). Utóbbi megközelítés alapja a hiperbolikus geometria Poincaré-féle körmodellje, melynek geometriai műveletei leírhatóak Blaschke-függvények segítségével, így ezen hiperbolikus térben történő optimalizálás az inverzpólusok természetes egységdiszkre történő leszűkítését adja. Több inverzpólusból álló póluskombináció együttes optimalizálása esetén a keresési tér \mathbb{D}^n . A kiterjesztés egyes algoritmusoknál közvetlenül megtehető, általános esetben pedig az illeszkedési keresés (*Matching Pursuit*, lásd [MalZha93; CheDonSau01]) alapján végezhető el. Az iteráció során itt egymás után haladjunk végig az inverzpólusokon, és egyszerre csak egy optimalizációját végezzük, a többit rögzítettnek tekintve. EKG jelfeldolgozási problémák esetén reprezentációs szempontból célszerű lehet az inverzpólusok keresési terének további leszűkítése valamely a priori információ, például a hullámformák becsült helye alapján.

Kezdőpontválasztás. Az optimalizáló algoritmusok hatékonysága növelhető, illetve konvergenciája biztosítható megfelelő kezdőpontválasztással. Ez a gyakorlatban különböző heurisztikák mentén történhet. EKG jelfeldolgozás esetén például a hullámformák becsült helyzete felhasználható a pólusszögek becsléséhez.

2.4. Szívütések modellezése

A célkitűzés a szívütések alkalmas modellezése, amely alapján jellemezhető a morfológiai viselkedésük, és amely alkalmas leíró jellemzők konstruálására. Munkám során a racionális függvények (lásd 1.5. *Racionális rendszerek*) segítségével történő adaptív transzformáció alkalmazhatóságát vizsgáltam. Egy, az osztályozási problémakörhöz illeszkedő modellt dolgoztam ki, a következőkben tárgyalt szempontok figyelembe vételével.

Adott szívütés egyetlen elvezetésen történő modellezését végezzük az

$$E(t) := \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_j} c_{jk} \cdot r_{a_j, k}(e^{it}) \right) \quad (t \in [-\pi, \pi))$$

modellgörbe segítségével, ahol $n \in \mathbb{N}^+$ az inverzpólusok száma, $\mathbf{a} = (a_j) \in \mathbb{D}^n$ az inverzpólusok egy páronként különböző rendszere, $\mathbf{m} = (m_j) \in (\mathbb{N}^+)^n$ az inverzpólusok multiplicitása, $c_{jk} \in \mathbb{C}$ pedig az $L^2(\mathbb{T})$ -beli legkisebb négyzetes közelítés együtthatói. Adott $f \in L^2(\mathbb{T})$, a szívütést reprezentáló valós jel modellgörbéje a $\operatorname{Re}(P_{\mathbf{m}}^{\mathbf{a}} f)$ projekció, azaz (\mathbf{a}, \mathbf{m}) ismeretében a c_{jk} együtthatók meghatározhatók a rendszer által kifeszített altérre vett ortogonális vetületként. A gyakorlati előnyei miatt az (\mathbf{a}, \mathbf{m}) által generált valamely MT-rendszert, illetve a kapcsolódó biortogonális rendszert vizsgáltam munkám során, melyek más lineáris együtthatókkal, de

ekvivalens reprezentációkat eredményeznek. A modellgörbe meghatározásának mint adaptív transzformációnak a központi kérdése a megfelelő póluskombináció választása. Munkám során a pólusválasztást optimalizációval közelítettem meg, alkalmas körülmények között.

Előzetesen az inverzpólusok számának és multiplicitásának meghatározására vonatkozó heurisztikákat tárgyalom. A szívütések egymással történő összehasonlíthatósága, a jellemzőgenerálás egységessége érdekében érdemes a pólusszám és multiplicitás rögzítése a modellben, valamely a priori információ alapján. A racionális reprezentáció a jel egy dimenziócsökkentését adja. A dimenzió meghatározásához megállapítható, hogy se túl kevés, se túl sok inverzpólus, illetve se túl alacsony, se túl magas multiplicitás nem előnyös. Túl alacsony dimenzió választása esetén a reprezentáció nem feltétlenül tartalmazza a jel releváns részleteit, így nem hordoz elegendő információt a gyakorlati alkalmazáshoz. Túl magas dimenzió esetén, bár a diszkrét jel nagyon pontos reprezentációját nyerhetjük, az a gyakorlat szempontjából irreleváns részleteket, például a zaj közelítését is tartalmazhatja. Az osztályozásra történő alkalmazás szempontjából a cél tehát a lehető legalacsonyabb dimenzió választása, amely még jól reprezentálja a szívütéseket, tartalmazza azok releváns részleteinek információit. Az EKG szívütések hullámformáinak morfológiáját tekintve indokolt három inverzpólus alkalmazása, melyek az egyes hullámformák reprezentációját célozzák meg, elemi racionális függvények segítségével. Az egyes hullámformák közül a QRS komplexus jellemzően összetettebb, bonyolultabb struktúrájú, mint a P és T hullám, így a QRS komplexus esetén indokolt magasabb multiplicitású elemi függvény alkalmazása. Az MIT-BIH adatbázis felvételein végzett vizsgálatok azt mutatják, hogy már alacsony multiplicitások mellett is jó reprezentációját kaphatjuk a szívütéseknek (természetesen megfelelően megválasztott inverzpólusok mellett), és a multiplicitások növelésével az approximációs hiba is csak kis mértékben javítható, valamint a zaj is reprezentálásra kerül a képen. Ezen megfontolások alapján az $(1,2,1)$, $(2,4,2)$, $(4,8,4)$, ... multiplicitásokat vizsgáltam, melyek közül a $(2,4,2)$ bizonyult a legalkalmasabbnak az MIT-BIH adatbázis tanítóhalmazán végzett keresztvalidáció alapján. Itt a felsorolás a P, QRS, T hullám reprezentációját célzó inverzpólusokhoz tartozó multiplicitások, ebben a sorrendben. Megjegyzendő, hogy a valós rendszer alkalmazhatóságának érdekében tulajdonképpen négy inverzpólussal dolgoztam, a fenti három inverzpólust a rögzített 0 pólussal kiegészítve. Approximációs szempontból ez a szívütés alapvonalának változtathatóságát jelenti, amely külön előnyös az alapvonal bizonytalansága miatt. A továbbiakban ezen rögzített 0 inverzpólus jelenlétét nem tüntetem fel külön.

A szívütéseknek fenti szempontok szerint meghatározott modellgörbéjének reprezentációs tulajdonságai közül kiemelendő, hogy mind az inverzpólusok, mind az együtthatók morfológiai információt hordoznak a görbéről, így a jellemzőgenerálás során mindezek figyelembe vétele indokolt lehet az osztályozás során.

2.5. Osztályozási módszertan

Munkám során a szívütés-osztályozás általános módszertanát követtem (lásd [ChaODwRei04; YeVKCoi12; Luz+16]), melynek egyes lépéseire vonatkozó javaslataimat ismertetem a következőkben. A felvételeket először előfeldolgoztam a zaj és hibák eltávolítása érdekében, majd a szűrt jeleket szétbontottam szívütésekre az adatbázisban szereplő R-csúcs annotációk alapján. A szívütéseket adaptív racionális transzformáció segítségével modelleztem, a rendszer pólusait a szívütésekhez, illetve az adott pácienshez igazítva, többféle megközelítés alapján. A morfológiai jellemzőket az egyes szívütésekre alkalmazott racionális transzformációból és a páciens-specifikus póluskombinációból származtattam, amik kiegészítésre kerültek dinamikus RR-intervallum jellemzőkkel. Ezt követte az irányított gépi tanulás és osztályozás, SVM és ANN segítségével. A módszer alkalmazható az adatbázisban elérhető mindkét elvezetésére együtt vagy külön-külön, egymástól részben vagy teljesen függetlenül is, majd ezen eredmények fuzionálhatóak, amely pontosabb, megbízhatóbb osztályozási eredményhez vezet. Hasonlóan, a többféle megközelítésből származó eredmény is kombinálható egymással, amely szintén az osztályozási pontosság növekedését eredményezheti.

2.5.1. Előfeldolgozás

A nyers EKG felvételek a rögzítés során torzulásokat szenvedhetnek (lásd 2.1.4. *Zaj és artifaktumok*), melyek szűrése, a tapasztalatok alapján, növeli a modellezés pontosságát és az osztályozás eredményességét. Az adatbázis tulajdonságai, és a szakirodalmi előzmények alapján az alapvonal-vándorlás eltávolítását, és szűrést hajtottam végre előfeldolgozásként. Az alapvonal wavelet-transzformáció segítségével került meghatározásra és eltávolításra [Zha05] alapján: az adatbázis 360 Hz-es mintavételi frekvenciáját, és az EKG jelek tapasztalati tulajdonságait figyelembe véve, a tizedrendű symlet (sym10) 8. szintű approximációs együtthatójából rekonstruált jel jól közelíti az alapvonalat. A szűrésre két módszert vizsgáltam: a klasszikus 5-12 Hz közötti sávszűrést a QRS komplexus energiájának maximalizálására [PanTom85], illetve egy aluláteresztő szűrőt (35Hz@3dB) a magasfrekvenciájú zaj eltávolítására [YeVKCoi12; Luz+16]. A szűréseket az adatbázis mindkét elvezetésén, egymástól függetlenül hajtottam végre.

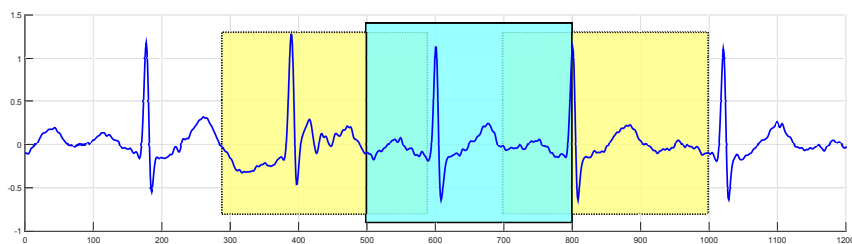
2.5.2. Szívütésekre bontás

Az adaptív racionális transzformáció alkalmazásához az EKG jelek szívütésekre bontása (szegmentálása) szükséges (lásd 1.5. *Racionális rendszerek*). Ehhez egy

új, fix szegmensméreten alapuló, de adaptív megközelítést javasolok a szakirodalmi előzmények figyelembe vételével.

A szívütésekre bontás általában megtehető a szívütések részletes, P, QRS, és T hullámformákra történő szegmentálásával, és azok kritikus pontjainak meghatározásával. Ez a probléma ugyanakkor önmagában is nehéz, és jelen esetben nem is feladat, ugyanis a racionális transzformáció alkalmazásához csak a szívütés kezdő- és végpontjának meghatározása szükséges. Ezért a részletes szegmentálás helyett, a referenciamunkákhoz hasonlóan [YeVKCoi12], az adatbázis QRS annotációi alapján származtatott fix méretű szívütés-szegmensekkel dolgoztam. Az egyes szegmensek 300 minta hosszúságúak, 100 mintát tartalmaznak az R-csúcs előtt (pre-R), és 200 mintát az R-csúcs után (post-R). Figyelembe véve az adatbázis 360 Hz-es mintavételi frekvenciáját, és a PR, valamint QT intervallumok tipikus hosszát, a szegmensek várhatóan tartalmazzák az adott szívütéshez tartozó hullámformákat. A módszer tehát egy egyszerű, mégis az adott szívütésről elérhető szinte összes információt tartalmazó szegmentálást eredményez. A módszer további előnye, hogy a fix méretű szegmensek normalizáltak és összehasonlíthatóak: az R-csúcsok helye rögzített, a P és T-csúcsok helye pedig korrelál egymással. Ezáltal lehetőség nyílik a szívütések együttes racionális modellezésére, közös póluskombináció segítségével.

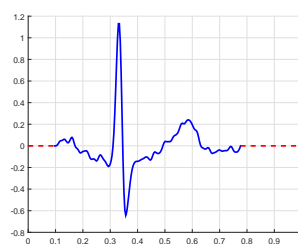
Az előnyös tulajdonságok ellenére, a megbízható alkalmazás érdekében, a szegmentálás továbbfejlesztése volt szükséges. Fix szegmensméret esetén ugyanis problémaként merül fel a szívritmus időbeli változása, valamint a szívütések szegmenseken belüli átlapolódása (lásd 2.7. ábra): fokozottabb szívritmus esetén a szegmens tartalmazhatja az előző, illetve következő szívütés egy részét is. Ez a probléma különösen a pólusoptimalizálás során jelentős, egy nagyenergiájú második QRS komplexus (vagy annak részleges) jelenléte ugyanis eltérítheti az optimalizációt, mivel az a teljes szegmens, így a második QRS komplexus approximációjára is törekszik. Ez a tényleges vizsgálendő szívütés rosszabb reprezentációját eredményezheti. A probléma kezelésére a szegmentálás adaptív módosítását javaslom, amely megtartja a fix méretet, valamint a konstrukció egyszerűségét, de kiküszöböli az átlapolódást. A konstrukcióhoz tekintsük a vizsgált szívütést megelőző és rákövetkező RR-intervallumot. Normális esetben az egyes RR-intervallumok tartalmazzák az első szívütés QRS komplexusának második felét és T hullámát, valamint a második szívütés P hullámát és QRS komplexusának első felét, ebben a sorrendben. A szívütések folytonos egymás után következését feltételezve, és figyelembe véve, hogy a T hullám hossza közelítőleg a P hullám hosszának kétszerese, az egyes RR-intervallumok közelítőleg $2/3$ -át tekinthetjük az első szívütéshez, és $1/3$ -át a másodikhoz tartozónak. Ez lehetőséget ad a P és T hullámokat tartalmazó szakaszok hosszának durva becslésére: közelítsük a pre-R szakasz szükséges hosszát a megelőző RR-intervallum hosszának $1/3$ -aként, a post-R szakaszt pedig a rákövetkező RR-intervallum $2/3$ -aként. Ha ezek a becslések kisebbek, mint a fix szegmensméretből származó 100, illetve 200 minta, akkor



(a) Átlapolódó szegmensek



(b) Eredeti szegmentálás

(c) Adaptív módosítás
(piros, szaggatott)

2.7. ábra. Átlapolódó szívütések és az adaptív módosítás hatása

Adatok forrása: MIT-BIH Arrhythmia Database

szegmensek fennmaradó részét töröljük, töltjük fel 0-val, ami az alapvonalnak felel meg. A módosítás tehát egy egyszerű és durva, de adaptív közelítésen alapul, amely a tapasztalatok alapján hatékonyan küszöböli ki az átlapolódás problémáját, de megtartja a fix szegmensméretből származó korábbi előnyöket. A módszer szemléltetésére lásd a 2.7. ábrát. A középső szegmens átlapolódik a szomszédosokkal (a), abban megjelennek a szomszédos szívütések komponensei is (b), melyet a javasolt módosítás eltávolít (c).

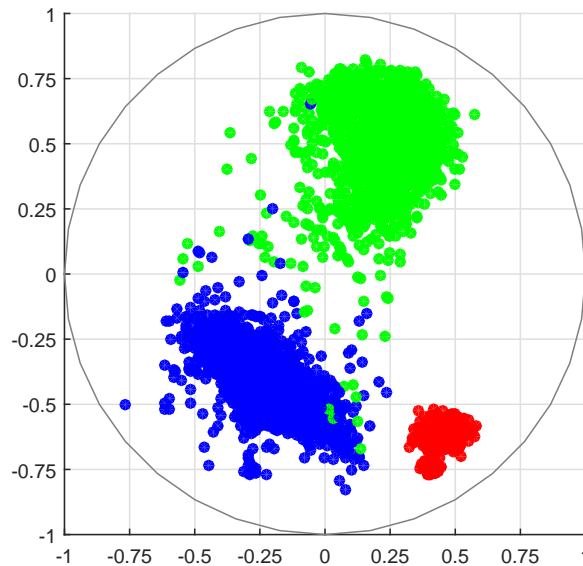
A módszer gyakorlati alkalmazása esetén szükséges az R-csúcsok megbízható detektálása. Az automatikus R-csúcs detektálás kiterjedt szakirodalommal rendelkezik (lásd pl. [KohHenOrg02]), pontossága a 0.5% hibaráttát is elérheti az MIT-BIH adatbázison. Ugyanakkor az R-csúcs helyzetének pontatlansága rontja a racionális rendszer pólusainak, valamint az RR-intervallum jellemzők pontosságát, így magát a klasszifikációt is. A kiértékeléskor szimuláltam ezt a pontatlanságot, illetve az osztályozás a pontatlanságra vonatkozó stabilitását is, melynek során a QRS annotációk helyét egy mesterséges zaj segítségével elmozdítottam (jitter), és így is kiértékeltem a javasolt algoritmusokat (lásd 2.6. *Eredmények értékelése*).

2.5.3. Racionális optimalizáció

Az adaptív racionális transzformációt a 2.4. *Szívütések modellezése* fejezet alapján, az ott megfogalmazott a priori feltevések alapján végeztem. A transzformáció alkalmazhatóságának központi problémája a megfelelő póluskombináció választása,

amely itt, az előzetesen rögzített pólusszám és multiplicitás figyelembe vételével, az inverzpólusok helyének meghatározására szorítkozik. Ezt pólusoptimalizálási szempontból tárgyalom, az ennek kapcsán felmerülő lehetőségeket ismertetem a továbbiakban.

Hatókör. A szívütések morfológiai tulajdonságainak figyelembe vételével az inverzpólusok páciens-adaptív meghatározását tűztem ki célul, vagyis amikor az adott felvétel összes szívütését egyazon póluskombináció segítségével reprezentáljuk. A feladat tehát olyan póluskombináció keresése, amely valamely átlagolt értelemben a felvétel összes szívütését jól reprezentálja. Bár ez a megközelítés az egyes szívütések rosszabb approximációját eredményezheti, mint az egyes szívütésekhez egyedi módon meghatározott póluskombináció esetén, számos szempontból előnyösebbnek tekinthető annál. Példának okáért, ha egy felvétel összes szívütéséhez megkeresünk az ahhoz legjobban illeszkedő póluskombinációt, akkor azt tapasztaljuk, hogy két vizuálisan hasonló jelalakú szívütés esetén is egymástól eltérő póluskombinációt kaphatunk, a felvétel egészét tekintve pedig a kapott egyedi inverzpólusok szórása nagy lehet (lásd 2.8. ábra). Adott felvétel esetén az egyes aritmia csoportokba tartozó szívütések azonban sok esetben hasonló alakúak, ami felveti olyan közös póluskombináció használatát, amely (alacsony dimenzió mellett is) jól reprezentálja az adott felvétel összes szívütését. A páciens-adaptív póluskombináció tehát egy stabilabb pólusválasztást eredményez, amely további szempontok miatt is előnyös: a póluskombináció ekkor a teljes felvételtől hordoz információt, az adott páciens



2.8. ábra. Szívütésenkénti optimalizálással kapott inverzpólusok szórása egy felvételen belül. (Hiperbolikus Nelder–Mead osztályozás 3 inverzpólus, $(2,4,2)$ multiplicitásokkal, az inverzpólusokat sorban kék, piros, zöldre színezve. Megjegyzendő, hogy ezek nagyrészt normális szívütések: a felvétel 2271 szívütéséből csak 34 aritmikus.)

Adatok forrása: MIT-BIH Arrhythmia Database

szívműködésének általános viselkedését írja. Továbbá lehetőségünk nyílik az adott felvétel szívüteseit egy közös, páciens-specifikus bázisban ábrázolni a racionális projekció segítségével, így a sorfejtés együtthatói összehasonlítható jelentéstartalommal bírnak. Az optimalizálás során felmerül kérdésként, hogy a páciens-adaptív póluskombinációt a felvétel hány szívütésének figyelembe vételével keressük. A gyakorlati tapasztalatok alapján, figyelembe véve a [Luz+16] szakirodalmi előzményeket, ezt nem feltétlenül szükséges a felvétel összes szívütésének bevonásával végezni, elegendőnek bizonyult az első öt perc szívütéseinek felhasználása. Ez egy kellő számú, reprezentatív mintája a páciens szívütéseinek, ugyanakkor nagyságrendileg is csökkenti a pólusoptimalizálás futásidejét a teljes felvétel figyelembe vételéhez képest.

Célfüggvény. Mivel esetünkben a pólusszám és a multiplicitások a priori rögzítettek, csak az inverzpólusok értékére vonatkozó optimalizáció végrehajtása szükséges. Tekintsük ehhez először az approximációs hiba minimalizálását célzó célfüggvényt, (2.1) szerint. A több szívütésre történő kiterjesztéshez vizsgáltam a hibafüggvényben történő összegzést (lásd (2.2)), és az egyes szívütésekhez optimalizált inverzpólusok pólustérbeli átlagolását is. Előbbi esetben a relatív PRD hibák összegével dolgoztam, utóbbi esetben pedig az euklideszi átlagot tekintettem. A hiperbolikus térbeli átlagolást annak euklideszi térbelihez való hasonlósága, a fedőkörök- és ellipszisek vizsgálatát pedig az inverzpólusok esetenként nagy szórása, és az outlier elemek szűrésének szükségessége miatt vettem el. A futásidő és az approximációs hiba szempontjából is a hibafüggvény kiterjesztése a hatékonyabb, viszont egyes esetekben a pólustérbeli átlagolás jobban teljesít. Vizsgáltam továbbá a hibafüggvény leszűkítését is. Ehhez tekintsünk egy $w \in L^2(\mathbb{T})$ ablakfüggvényt, amely a hullámformák becsült helye alapján azok környezetére vonatkozó leszűkítést reprezentálja (speciális esetben legyen w egy téglalapablak), és keressük azon $\mathbf{a} \in \mathbb{D}^n$ inverzpólust ($n = 1$) vagy póluskombinációt ($n = 3$), melyre

$$\mathbf{a} \in \arg \min_{\mathbf{b} \in \mathbb{D}^n} \|f \cdot w - P_{\mathbf{m}}^{\mathbf{b}}(f \cdot w)\|_2.$$

Ezáltal lokális approximációs tulajdonságok követelhetőek meg, amely biztosíthatja az egyes hullámformák megfelelő reprezentációját.

Kezdőpontválasztás. A kezdőpont meghatározását, a modellgörbe elvárt reprezentációs tulajdonságai szerint, a P, QRS, és T hullámok helyének előzetes becsülésével tettem meg, erre javaslok egy egyszerű módszert. Megjegyzendő, hogy a hullámformák szegmentálásával a hullámok helyének pontosabb becslése adható. A pontos szegmentálás azonban önmagában is kihívás, és maga is egy pólusoptimalizációs problémára vezet (lásd 3. *EKG szegmentálás*). Ennek fényében itt csak egy egyszerű, de adaptív becslést javaslok, mellyel az adott felvétel szívütéseiből tartozó P és T hullámok átlagos helye becsülhető. Tekintsük a felvételek első öt percének szívütéseiből átlagolt virtuális szívütéseket. Megállapítható, hogy ez a virtuális

jel is a szívütésekhez hasonló karakterisztikával bír, a valós szívütésekhez hasonló hullámformák figyelhetőek meg rajta, viszont egy simább lefutású, könnyebben kezelhető jelet eredményez. Először képezzük a QRS komplexus helyének becslését egyszerű geometriai megfontolások, és a QRS hosszára vonatkozó kényszerfeltételek mellett. Itt az R-csúcs helye ismert, az a szegmentálási technika révén mindig a szívütés-szegmensek 100. mintája. A QRS komplexus leválasztása után tekintsük a szívütés QRS komplexus előtti és utáni szakaszait. Ezen szakaszokon végezzünk simítószűrést a magasfrekvenciás zaj szűrésére, azaz approximáljuk a jelszakaszokat trigonometrikus polinomokkal, a diszkrét Fourier-transzformáció első néhány együtt-hatójából származtatva. A P és T hullámok helyét becsljük a simított jel lokális maximumhelyeivel. Több lokális maximum jelenléte esetén tekintsük a legnagyobb kiemelkedésűeket, azaz melyek kiemelkedése legalább a legnagyobb kiemelkedés fele, és ezek közül tekintsük az utolsót, illetve az elsőt. Ezen heurisztikák azért voltak szükségesek, mert időnként a Fourier-approximáció oszcillációja észlelhető a szívütés végeinél, amely hamis maximumhelyeket eredményezhet. A P és T hullám becslt, és az R-csúcs ismert helye alapján a kezdőpontok pólusszögei közvetlenül becslhetőek, a pólusnagyságot pedig rögzített $(0.5, 0.7, 0.5)$ értékre történő megválasztásra javaslom. Utóbbi javaslat megfelel a pólusoptimalizáció tapasztalt viselkedésének, miszerint az optimalizáció érzékenyebb a pólusszögek, mint a pólusnagyságok megválasztására. A tesztek azt mutatják, hogy ez a kezdőpont már önmagában is jól illeszkedő póluskombinációt alkot, az innen indított pólusoptimalizálás pedig jobban teljesít, mint más, rögzített vagy véletlen pontból indított optimalizálás.

Algoritmus, keresési tér. Munkám során a hiperbolikus Nelder–Mead szimplex algoritmust választottam optimalizálóként. A hiperbolikus változatot a keresési térrel vett kapcsolata, a Nelder–Mead módszer pedig annak előnyös tulajdonságai, deriváltmentessége, és egyszerű iteratív működése miatt választottam. Ha a célfüggvényt a hibafüggvény alapján képezzük, akkor az csak approximációs szempontokat vesz figyelembe, a reprezentációs szempontok biztosítása további módosításokat igényel. A [BogFri18] cikkben az algoritmus működési paramétereit módosítottam: az iteráció lépésszámának korlátozásával, és a kilépési hibaszint növelésével. Ez a technika felfogható a megbízhatónak ítélt kezdőpont lokális finomításának, korlátozva az attól való érdemleges eltérést. A [BogFri19a] cikkben egy szofisztikáltabb módszert javaslom, a célfüggvény fenti kiterjesztései és leszűkítései mellett a keresési tér leszűkítését is vizsgáltam. A leszűkítést többféleképpen megtehetjük, csak a pólus-szög, illetve a teljes inverzpólus leszűkítésével. Ehhez tekintsük az $a_0 = \rho_0 e^{i\alpha_0} \in \mathbb{D}$ becslt inverzpólust, $\delta \in (0, \pi)$, illetve $c \in (0, 1)$ küszöböket, és \mathbb{D}

$$D_{\alpha_0}(\delta) := \{a = \rho e^{i\alpha} \in \mathbb{D} : |\alpha - \alpha_0| < \delta\},$$

valamint

$$D_{a_0}(c) := \{a \in \mathbb{D} : d(a, a_0) < c\}$$

leszűkítéseit, ahol d az euklideszi vagy a hiperbolikus metrika (lásd (1.14)). A hiperbolikus Nelder–Mead alkalmazásához tekintsük ezen leszűkítések \mathbb{D} -re történő leképezését. Utóbbi esetben, hiperbolikus metrika mellett, ez elegáns módon tehető meg a Blaschke-függvények segítségével. A

$$d(a, a_0) := |B_{a_0}(a)| < c \quad (a \in \mathbb{D})$$

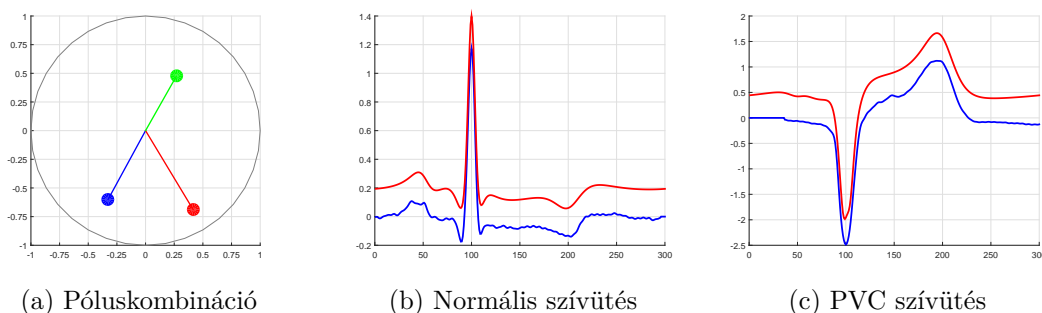
feltétel teljesüléséhez tekintsük a

$$b := \frac{1}{c} B_{a_0}(a) \in \mathbb{D} \quad (a \in \mathbb{D}),$$

$$a = B_{-a_0}(cb) \in D_{a_0}(c) \quad (b \in \mathbb{D}) \quad (2.3)$$

transzformációt, mellyel már b -re vonatkozóan végrehajtható a hiperbolikus Nelder–Mead algoritmus.

A 2.9. ábrán a páciens-adaptív pólusoptimalizálás eredményét szemléltetem egy felvétel két, különböző osztályú szívütése esetén.



(a) Póluskombináció

(b) Normális szívütés

(c) PVC szívütés

2.9. ábra. Pólusoptimalizálás és racionális approximáció (piros, eltolva)

Adatok forrása: MIT-BIH Arrhythmia Database

2.5.4. Jellemzőgenerálás

Munkám során az adaptív racionális transzformációból kinyerhető morfológiai jellemzőket, és az azok alapján végzett osztályozás hatékonyságát vizsgáltam. Ehhez tekintsük a fenti módon meghatározott páciens-adaptív póluskombinációkat, és reprezentáljuk a szívütéseiket az így kapott racionális rendszer segítségével. A szívütéseknek a transzformációból származó legkézenfekvőbb jellemzése a racionális projekció együtthatóival tehető meg, a szívütések együtthatói közti különbségek azok morfológiai különbségeire utalhatnak. Három inverzpólus, $(1,2,1)$, $(2,4,2)$, illetve $(4,8,4)$ multiplicitások esetén, valós rendszerekkel dolgozva ez rendre 8, 16, illetve

32 valós együtthatót jelent, mind az MT, mind a biortogonális rendszer alkalmazása esetén. A racionális rendszerek együtthatói, hasonlóan a wavelet-együtthatókhoz, idő- és frekvenciatérbeli információt is tartalmaznak az egyes szívütekről. Az adaptívan megválasztott inverzpólusokat tekintve viszont felmerül azok jellemzőként történő alkalmazásának lehetősége is. Ennek motivációja a racionális alap- és elemi függvények térbeli lokalizáltsága: a pólusszög meghatározza az elemi függvények helyzetét, a pólusnagyság pedig azok általános alakját. Ezáltal az inverzpólusok maguk is morfológiai információt hordoznak a szívütekek P, QRS, és T hullámairól, így megvizsgáltam a pólusszög és -nagyság jellemzőként történő felhasználását is. A jellemzővektor morfológiai komponense tehát tartalmazza a projekció együtthatóit mint lokális (szívütekenkénti) jellemzőket, valamint opcionálisan az inverzpólusokat mint globális (páciensenkénti) jellemzőket.

A morfológiai jellemzők mellett a jellemzővektort kiegészítettem dinamikus RR-intervallum jellemzőkkel is. A szokásos 4 RR-jellemző [YeVKCoi12] alapján a megelőző és rákövetkező RR-intervallum hossza (pre- és post-RR), az RR-intervallumok átlaga a megelőző 10 másodpercben és a megelőző 5 percben (lokális és átlagos RR). Vizsgáltam az RR-jellemzők [LinYan14] által javasolt normalizálását is, amikor az RR-intervallumok hosszát az egész felvételre vonatkozó átlaggal normalizáljuk, ezúton kiküszöbölve a szívritmus különbözőségének megjelenését a jellemzővektorban (NRR-jellemzők).

2.5.5. Osztályozás

Az osztályozás során az MIT-BIH adatbázis szívütekeit a jellemzőgenerálás után diszjunkt tanító- és teszhalmazokra osztottam. Az osztály-orientált séma esetén a szívütekeket a felvételektől függetlenül, csak az aritmiaosztályokat figyelembe véve csoportosítjuk, majd osztjuk szét a két halmazra. A szétosztáshoz használt hányszókat [YeVKCoi12] alapján végeztem: az összes normális szívüte 13%-a, a nagyobb elemszámú osztályok 40%-a, a többi 50%-a képezi a tanítóhalmazt, amely így az adatbázis összes szívüte 21.89%-át tartalmazza, a szívütekeket véletlenszerűen kiválasztva. A páciens-orientált séma szerint a szívütekek felvételenként kerülnek szétosztásra, az egyes felvételek összes szívüte 50%-a ugyanabba a halmazba kerül. [ChODwRei04] javaslatát követve az adatbázis felvételeinek fele-feleéből képzett DS1 és DS2 halmazok alkotják a tanító- és teszhalmazt. A szétosztás után a tanítóhalmazon a kinyert jellemzők és az adatbázis aritmia-annotációi alapján irányított gépi tanulást hajtottam végre, SVM, illetve ANN osztályozókkal. Az SVM osztályozót a szakirodalmi javaslatoknak megfelelően RBF kernellel használtam, az osztályozó hiperparamétereit (a regularizációs paramétert és a kernel szórását) a tanítóhalmazon végzett tízlépéses keresztvalidációval határoztam meg minden egyes esetben. A bináris SVM kiterjesztését az egy az egy ellen séma alapján végeztem. Az ANN al-

kalmazásához, szintén a szakirodalmi előzményeknek megfelelően, egy előrecsatolt hálózatot tekintettem két rejtett réteggel. A bemenő réteg neuronjainak számát a jellemzővektor dimenziója, a kimenő réteget az osztálycímkék, belső rétegeinek számát pedig tízszeres keresztvalidáció alapján határoztam meg. Mindkét osztályozó esetén a keresztvalidációkat egy rácson történő kimerítő kereséssel hajtottam végre, amely futásidőben alulmaradhat a más lehetséges heurisztikák mögött, de a hiperparaméterek pontosabb meghatározását teszi lehetővé. A keresztvalidációt követően az optimális hiperparaméterek segítségével irányított tanítást végeztem a tanítóhalmazon, a jellemzővektor és az adatbázis annotációi mint osztálycímkék alapján. Végül az osztályozás pontosságát a tanított modell teszhalmazon történő kiértékelésével, a predikciók és az adatbázis annotációi közötti összehasonlítással értékeltem ki. SVM esetén a predikció során posterior valószínűségek is származtatásra kerültek a fúzióhoz, ANN esetén ezt a *2.6. Eredmények értékelése* pontban tárgyalt osztályozási bizonytalanság miatt nem vizsgáltam.

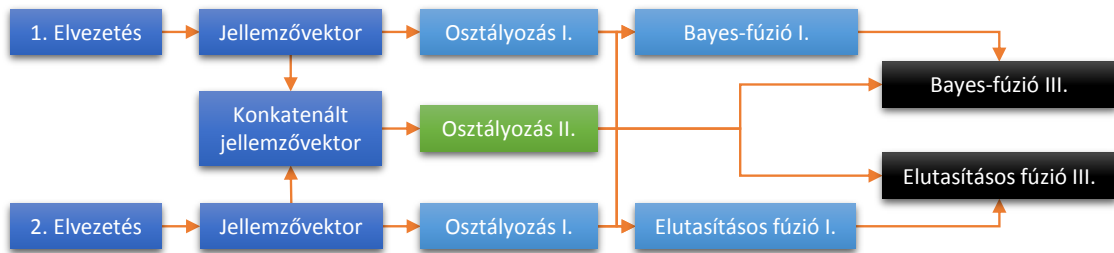
2.5.6. Elvezetések konfigurációja és fúzió

Az MIT-BIH két elvezetésen rögzített felvételeket tartalmaz (lásd *2.1.5. Adatbázisok*). Nyilvánvalóan több információt nyerhetünk a szívütésekről mindkét elvezetés felhasználásával, mely által az osztályozás pontossága is növelhető. Az elvezetések kezelését többféle megközelítés alapján tehetjük meg, mind a pólusválasztás, jellemzőgenerálás, valamint fúziós stratégia szempontjából.

A pólusválasztást tekintve egyaránt indokolt lehet a két elvezetés külön-külön, illetve együtt történő kezelése, vagyis elvezetésenként egyedi, illetve közös póluskombináció használata (lásd *2.3. Racionális rendszerek az EKG feldolgozásban*). Előbbi esetben a pólusoptimalizálást a két elvezetésen független módon, utóbbi esetben pedig mindkét elvezetés szívütéseinek együttes figyelembe vételével hajtottam végre.

A két elvezetésből kinyerhető információk kombinációjához, a pólusválasztási stratégiától függetlenül, több fúziós stratégiát vizsgáltam. Az első stratégia [ChaoDwRei04] javaslatát követi: hajtsuk vége az osztályozást mindkét elvezetésre egymástól függetlenül, majd a kapott predikciókat kombináljuk egy megbízhatóbb osztályozási predikció eléréséhez. A két elvezetés fúziójára [YeVKCoi12] alapján két megközelítést vizsgáltam: Bayes-alapú és elutasításos fúziót. Bayes-alapú fúzió során az SVM osztályozó posterior valószínűségeit mint az egyes osztályokba tartozás valószínűségeit kombináljuk a két elvezetésen, a feltételes valószínűségekre vonatkozó Bayes-tétel alapján, majd ezen eredmény alapján pontosítjuk a predikciót, a legnagyobb kombinált posterior valószínűségű osztálycímkéket kiválasztva. Elutasításos fúzió során a két elvezetésen kapott osztálycímkéket hasonlítjuk össze, és a különbözőképpen osztályozott szívütések elutasításra kerülnek. Ezáltal a szívütések egy

részéhez semmilyen osztálycímkét nem rendelünk, ezek kiértékelése orvosszakértők bevonásával történhet, viszont a fennmaradó szívütésekre adott predikciók biztosabbnak tekinthetők. A másik stratégia legyen a két elvezetés jellemzővektorainak kombinációja az osztályozás előtt. Ehhez tekintsük a két jellemzővektor konkatenációját (az esetlegesen ismétlődő RR-intervallumot és a globális morfológiai jellemzőket csak egyszer szerepeltetve), és végezzünk egyetlen osztályozást az így egyesített jellemzővektor alapján. Ugyan ez a stratégia jellemzően alacsonyabb pontosságot eredményez, mint az első, használatát indokolja, hogy az egyes osztályokra vonatkozó szenzitivitás és prediktivitás magasabb lehet, és eredménye tovább kombinálható az első stratégia eredményeivel. A harmadik stratégia ugyanis legyen az előző kettő fúziója azok osztálycímkéi és posterior valószínűségei alapján. A stratégiák áttekintéséhez lásd a 2.10. ábrát, melyen az egyes elvezetéseken képzett jellemzővektorok elkészítését, az osztályozás végrehajtását, és a fúziókat szemléltetem, az egyes stratégiákat külön színnel jelölve.



2.10. ábra. Osztályozási stratégiák áttekintése

2.6. Eredmények értékelése

Munkám során a fenti megfontolások alapján a paraméterbeállítások több száz kombinációját vizsgáltam, a következőkben a legeredményesebb változatot, az ahhoz vezető utat, és a közben megszerzett tapasztalatokat mutatom be, a végső javasolt módszer hatékonyságának és néhány köztes változat hatékonyságának bemutatásával. A módszerek kiértékelését elsősorban a teljes pontosság alapján végeztem, de a további szokásos metrikákat (lásd 1.7. *Osztályozás, klaszterezés, gépi tanulás*) is kiszámítottam, és a konfúziós mátrixokat is interpretáltam. A módszertan kidolgozását az osztály-orientált séma szerint, 16 osztály vizsgálatára fókuszálva végeztem, az ezen a téren elért eredményeket ismertetem elsődlegesen, majd tárgyalom a páciens-orientált séma hasonló módszertannal történő kezelésének lehetőségeit. Osztály-orientált séma esetén a szakirodalom legjobb eredményei $\sim 96-99\%$ között, míg páciens-orientált esetben $\sim 85-95\%$ között mozognak (lásd 2.3. és 2.5. táblázat). Tehát előbbi esetben a pontosság 99% feletti tized- vagy akár századszázalékos javítása is érdemes.

Elsőként az SVM és az ANN alkalmazása során szerzett tapasztalatokat tárgyalom, melyeket a módszertan többféle kombinációja mellett, az osztályozókat egyetlen elvezetésen kiértékelve kaptam. Általánosságban az SVM segítségével nagyobb pontosság érhető el, valamint stabilabb, és jobban reprodukálható. A [BogFri18] és [BogFri19a] cikkek módszertanait alkalmazva az SVM 99.38%, illetve 99.51%-os pontosságot eredményezett, amely mindkét esetben csak kis mértékben ingadozott a véletlenszám-generátor inicializálásának, illetve a bemenő adatok perturbációjának függvényében. Tehát az SVM reprezentatív és számítási szempontból is stabilnak mutatkozott. Ezzel szemben az ANN osztályozók mind a bemenő adatok perturbációjára, mind a véletlenszám-generálásra érzékenyek bizonyultak, eredményük nagy ingadozást mutatott 99% és 99.5% között. Az instabilitás nemcsak a hálóméret változtatásával, illetve a keresztvalidáció során, hanem a tanítást azonos hálóméret mellett egymás után többször végrehajtva is megmutatkozott az eredményekben. Így, bár összességében hatékony, sőt egyes esetekben kiemelten magas pontosság érhető el vele, az instabilitása miatt végső soron elvettem az ANN használatát. A továbbiakban az SVM eredményeire fókuszálok, amely stabilitása révén jobban elősegítette a módszertani fejlesztések relevanciájának kiértékelését.

A dinamikus RR-intervallum jellemzők vizsgálata során azt tapasztaltam, hogy ezen jellemzők használata szükséges a megbízható osztályozáshoz. Ez elvi szempontból is indokolható, mivel olyan információt tartalmaznak a szívütekekről, melyeket a modellgörbe nem reprezentál. Vizsgáltam ezen jellemzők normalizált, NRR változatát is, viszont ezek, a racionális morfológiai jellemzőkkel kombinálva általában nem bizonyultak hatásosabbnak, mint a hagyományos RR-jellemzők.

A [BogFri18] cikkben bemutatott módszertannal 99.38%-os pontosságot (illetve 99.66%, 1.56% elutasításával) értem el az MIT-BIH adatbázison, osztály-orientált séma szerint. Ezen cikkben javasoltam a racionális modellgörbék használatát morfológiai jellemzők származtatásához. A konkrét megvalósítást tekintve páciens-adaptív póluskombinációt használtam (2,4,2) multiplicitások mellett, a pólusoptimalizáláshoz pedig a hiperbolikus Nelder–Mead paramétereinek korlátozásával, és adaptív kezdőpontválasztással végeztem. Ezután a jellemzővektor morfológiai komponensének MT-rendszer együtthatói alapján állítottam össze, majd elvezetésenként külön-külön, az első fúziós stratégiát használtam SVM osztályozó segítségével. Ezen módszertani döntéseket a végső osztályozási pontosság, illetve a tanítóhalmazon végzett keresztvalidációk alapján hoztam meg. Utóbbi megközelítés lehetővé teszi a módszertan általánosítását más karakterisztikus jellemzőkkel bíró adatsorok esetére. Az előfeldolgozás szempontjából azt állapítottam meg, hogy a felvétel szűrése nagyban javítja a pólusválasztás stabilitását, az 5-12 Hz-es sávszűrő és a 35 Hz-es aluláteresztő szűrő közül pedig ez utóbbi teljesít jobban. A multiplicitások közül a vizsgált (1,2,1), (2,4,2), (4,8,4), ... jelöltek közül a (2,4,2) teljesít a legjobban. Az MT- és a biortogonális rendszerrel végzett approximáció a szívütekek megegyező reprezentációját

eredményezi, így mindkét rendszer együtthatói alapján végeztem jellemzőgenerálást. Bár elméleti szempontból a biortogonális rendszer használata tűnik ígéretesebbnek az alapfüggvények időbeli lokalizáltsága miatt, segítségével csak 97-99%-os eredmény érhető el, amely alulmúlja az MT-rendszer eredményeit. A pólusoptimalizálás tekintetében nem tapasztaltam érdemi különbséget az összegzett hibafüggvény, illetve a pólustérbeli átlagolás között, így annak időigényét szem előtt tartva előbbi alkalmazását javaslom. A pólusoptimalizálást az adaptív kezdőpontválasztással, és a paraméterek korlátozásával végezve is több tizedszázalékkal javítható az osztályozási pontosság. Megjegyzendő, hogy az adaptív kezdőpont mint póluskombináció közvetlen felhasználása is 99.3%-os osztályozási pontosságot eredményez, amely alátámasztja annak indokoltságát. Végül megállapítható, hogy az első stratégia szerinti fúzió a várakozásoknak megfelelően javítja az egyes elvezetések 99.05% és 98.65%-os pontosságát.

A [BogFri19a] cikkben a [BogFri18] módszertan érdemi továbbfejlesztését javasoltam, további lehetőségek vizsgálatával (lásd 2.1. táblázat). Így 99.51%-os pontosságot (illetve 99.76%-ot, 1.22% elutasításával) értem el az MIT-BIH adatbázison, osztály-orientált séma szerint. A fejlesztési lépéseket időrendben vizsgálva javulást hozott: a szívütésekre bontás során javasolt adaptív szegmentálás, az elvezetésenként közös póluskombináció használata, a pólusszög (globális morfológiai) jellemzőként történő felhasználása, a pólusoptimalizálás módosítása a keresési tér és a hibafüggvény leszűkítésével, valamint a különböző fúziós stratégiák használata. Érdekes tapasztalat, hogy pólusnagyság jellemzőként történő felhasználása kevésbé tűnik eredményesnek, amely azzal megmagyarázható, hogy a racionális rendszer érzékenyebb a pólusszögre, mint a nagyságra. A két elvezetés azonos póluskombinációval történő modellezésének hatékonysága pedig a racionális modell helyességét támasztja alá. Az egyes módszertani lépések hatására bekövetkezett pontosságjavuláshoz lásd a 2.1. táblázatot, az egyes pólusválasztási és fúziós stratégiák áttekintéséhez pedig a 2.2. táblázatot. A tapasztalatok összegezve ezen módszertant javaslom az osztály-orientált séma szerinti osztályozásra. További részletes kiértékelést és konfúziós mátrixot a 2.7. és 2.4. táblázatokban közlök.

2.1. táblázat. A továbbfejlesztés lépései

Lépés	Pontosság
[BogFri18] módszertan	99.38%
Adaptív szegmentálás	99.40%
Pólusszög, mint jellemző	99.44%
Pólusoptimalizálás javítása	99.48%
Osztályozási stratégiák fúziója	99.51%

Az eredmény szakirodalmi előzményekkel történő összevetését lásd a 2.3. táblázatban. Az összesített pontosságok alapján megállapítható, hogy a javasolt módszer jobb teljesítményt nyújt, mint a korábbi módszerek. Alább részletesen összehasonlítom a javasolt módszert a szakirodalom korábbi legjobb eredményével, amely a [YeVKCoi12] munka. Ezen módszer hasonló módszertannal, megfelelő előfeldolgozás és szívtüésekre bontás után waveletek segítségével jellemzi a szívtüéseket. Ez egy rögzített, nem adaptív rendszer szerinti transzformációt eredményez, amely ugyan előnyös reprezentációját adja a szívtüéseknek, de a megfelelő pontosság eléréséhez 114 együtthatható felhasználása szükséges. A szerzők ezek együtthathatók további 14, ICA együtthathatóval történő kiterjesztését, majd PCA alkalmazását javasolják a megfelelő dimenziócsökkentéshez, és a végső 18 morfológiai együtthatható generálásához. Az adaptív racionális transzformáció során, mivel a rendszert a szívtüések morfológiája szerint építettük fel, a dimenziócsökkentés közvetlenül a sorfejtésből származtatható, az alacsonyrendű részletösszegek segítségével. Matematikai szempontból az MT-rendszer a waveletekhez hasonlóan egyszerűen és hatékonyan kezelhető, a pólusoptimalizálási lépés pedig összemérhető az ICA és PCA műveletidejével.

A javasolt módszer robusztusságának kiértékeléséhez az R-csúcs detektorok bizonytalanságát szimuláltam a QRS annotációk helyének elmozdításával (jitter) [YeVKCoi12] alapján. Ehhez az R-csúcs helyét additív, 0 várható értékű, és öt mintának megfelelő szórású normális eloszlású (fehér) zaj segítségével módosítottam a módszer végrehajtása előtt. Az így adódó 99.34%-os pontosság (illetve 99.65%, 1.45% elutasításával) bizonyítja a módszer robusztusságát.

A páciens-orientált séma szerinti kiértékelést hasonló módszertan szerint végeztem, az itt elért eredmények 80-93% közöttiek, melyek kevésbé stabilak az egyes módszertani változtatásokra nézve. A kiértékelés során az összesített pontosság mellett érdemes figyelmbe venni az egyes osztályok szenzitivitását és prediktivitását, amely a racionális transzformáció szempontjából főként az S osztálynál (lásd 2.6. táblázat) problémás. Kiemelendő a keresztvalidáció szerepe, mivel a tapasztalatok szerint a kapott hiperparaméterek nagyban befolyásolhatják az osztályozási pontosságot. A legjobb, önmagában is értékes eredmény az osztály-orientált sémára végsőként javasolt módszer módosításával, a pólusoptimalizálás során pólustérbeli átlagolás és normalizált NRR-jellemzők használatával érhető el. Ennek pontossága 93.46%, és a három fő osztály megfelelő mértékű elkülönítését adja (lásd 2.6. táblázat), valamint más szakirodalmi eredmények között is megállja a helyét (lásd 2.5. táblázat). Itt említeném meg a [DozBogKov19] publikációt, melyben többféle adaptív transzformációs módszer kombinációja segítségével történő páciens-alapú osztályozást végeztünk, többféle kombinációt, köztük együttes tanítást vizsgálva. A munkában a racionális transzformáció és a fúziós stratégiák kidolgozásában vállaltam szerepet. A módszer segítségével 89-94%-os pontosságot sikerült elérnünk, amely meghaladja a szakirodalom korábbi eredményeit (lásd 2.5. táblázat).

2.2. táblázat. Jellemzőgenerálás, pólusválasztás, és fúziós stratégiák összehasonlítása

Jellemzővektor	Pólusok	Stratégia	Pontosság	
			Bayes-fúzió	Elutasítás
MT242 RR	közös	I	99.39%	99.67%
MT242 RR	egyedi	I	99.39%	99.71%
MT242 RR φ	közös	I	99.48%	99.72%
MT242 RR φ	egyedi	I	99.46%	99.68%
MT242 RR r φ	közös	I	99.47%	99.69%
MT242 RR r φ	egyedi	I	99.45%	99.65%
MT242 RR	közös	II	99.28%	
MT242 RR	egyedi	II	99.28%	
MT242 RR φ	közös	II	99.36%	
MT242 RR φ	egyedi	II	99.24%	
MT242 RR r φ	közös	II	99.32%	
MT242 RR r φ	egyedi	II	99.26%	
MT242 RR	közös	III	99.44%	99.76%
MT242 RR	egyedi	III	99.42%	99.76%
MT242 RR φ	közös	III	99.51%	99.76%
MT242 RR φ	egyedi	III	99.46%	99.72%
MT242 RR r φ	közös	III	99.49%	99.73%
MT242 RR r φ	egyedi	III	99.45%	99.68%

A táblázat oszlopai: a jellemzővektor komponensei (MT együtthatók, RR-intervallum jellemzők, pólusnagyság- és szög); pólusválasztási stratégia (elvezetésenként egyedi vagy közös); osztályozási stratégia; teljes pontosság (Bayes- és elutasításos fúzió mellett).

2.3. táblázat. Eredmények összevetése a referenciamunkákkal (osztály-orientált)

Módszer	Jellemzővektor	Osztályozó	Pontosság
[Lag+00]	Hermite	SOM	98.49%
[PraSah03]	Wavelet + RR	ANN	96.77%
[OsoHoaMar04]	Hermite + HOS	SVM	98.18%
[RodGonIII05]	Hullámforma e.h.	DT	96.13%
[Jia+06]	Wavelet + ICA	SVM	98.86%
[YeVKCoi12]	Wavelet + ICA (PCA) + RR	SVM	99.32% (99.71%)
[BogFri18]	Racionális + RR	SVM	99.38% (99.66%)
[BogFri19a]	Racionális + Pólusszög + RR	SVM	99.48% (99.72%)
[BogFri19a]	Fúzió	SVM	99.51% (99.76%)

2.4. táblázat. Konfúziós mátrix (osztály-orientált, pontosság: 99.51%)

		Predikciók																
		N	L	R	A	V	/	a	!	F	x	j	f	E	J	e	Q	Σ
Osztálycímek	N	65068	0	5	72	48	0	1	0	27	0	34	5	0	1	2	0	65263
	L	0	4840	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4843
	R	1	0	4347	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	4353
	A	54	1	6	1460	2	0	2	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1527
	V	24	0	0	1	4229	0	1	1	21	0	0	0	0	0	0	0	4277
	/	0	0	0	0	1	4212	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	4214
	a	4	0	0	3	4	0	64	0	0	0	0	0	0	0	0	0	75
	!	0	1	0	0	5	0	0	230	0	0	0	0	0	0	0	0	236
	F	11	0	0	0	28	0	0	0	361	0	0	0	0	1	0	0	401
	x	0	0	0	0	1	0	0	0	0	95	0	0	0	0	0	0	96
	j	4	0	2	1	3	0	0	0	1	0	103	0	0	0	0	0	114
	f	1	0	0	0	1	4	0	0	0	0	0	485	0	0	0	0	491
	E	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	49	0	0	0	53
	J	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40	0	0	41
	e	4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	8
	Q	4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	16
	Σ	65179	4844	4360	1540	4328	4216	68	231	410	95	138	501	49	44	5	0	86008

2.5. táblázat. Eredmények összevetése a referenciamunkákkal (páciens-orientált)

Módszer	Jellemzővektor	Osztályozó	Pontosság
[ChaODwRei04]	Hullámforma e.h. + RR	LD	86.1%
[LlaKhaMar12]	Hullámforma + wavelet + RR	LD	93%
[YeVKCo12]	Wavelet + ICA (PCA) + RR	SVM	86%
Bognár G.	Racionális + Pólusszög + NRR	SVM	93.46%
[DozBogKov19]	B-spline/Racionális/Hermite/Wavelet + Paraméterek + RR, kombináció	SVM	94.2%

2.6. táblázat. Konfúziós mátrix (páciens-orientált, pontosság: 93.46%)

		Predikciók					
		N	S	V	F	Q	Σ
Osztálycímek	N	42496	332	1320	90	0	44238
	S	791	1076	104	1	0	1972
	V	144	73	2995	8	0	3220
	F	294	1	92	1	0	388
	Q	7	0	0	0	0	7
	Σ	43732	1482	4511	100	0	49825

2.7. táblázat. Osztály-orientált séma: osztályok, tanító- és teszthalmozok, osztályozási eredmények

Aritmia osztály a.	Össz. db.	Tanító % db.	Teszt db.	Bayes-fúzió I.			Elutasítás I.			Bayes-fúzió III.			Elutasítás III.			
				TP	Se %	+P %	TP	R	Se %	+P %	TP	Se %	+P %	TP	R	Se %
NOR N	75016	13	9753	65263	65061	99.69	99.79	99.86	99.89	65069	99.70	99.82	64505	683	99.88	99.90
LBBB L	8072	40	3229	4843	4841	99.96	99.90	99.98	99.96	4840	99.94	99.92	4834	9	100.00	99.96
RBBB R	7255	40	2902	4353	4347	99.86	99.70	99.89	99.86	4347	99.86	99.72	4345	5	99.93	99.91
APC A	2546	40	1019	1527	1453	95.15	95.22	96.57	97.57	1455	95.28	95.10	1405	77	96.90	97.71
PVC V	7129	40	2852	4277	4225	98.78	97.64	99.42	98.57	4233	98.97	97.78	4114	142	99.49	99.01
PACED /	7024	40	2810	4214	4213	99.98	99.91	100.00	99.95	4212	99.95	99.91	4203	11	100.00	99.95
AP a	150	50	75	75	62	82.67	93.94	89.55	98.36	64	85.33	94.12	60	8	89.55	100.00
VF !	472	50	236	236	231	97.88	99.57	98.70	99.56	230	97.46	99.57	228	5	98.70	99.56
VFN F	802	50	401	401	355	88.53	88.97	92.63	92.90	359	89.53	88.21	325	53	93.39	93.12
BAP x	193	50	97	96	95	98.96	100.00	100.00	100.00	95	98.96	100.00	90	6	100.00	100.00
NE j	229	50	115	114	102	89.47	69.86	92.86	85.05	102	89.47	71.83	90	20	95.74	87.38
FPN f	982	50	491	491	485	98.78	96.42	99.16	97.53	485	98.78	96.61	474	13	99.16	97.93
VE E	106	50	53	53	49	92.45	100.00	97.96	100.00	49	92.45	100.00	48	4	97.96	100.00
NP J	83	50	42	41	39	95.12	92.86	97.30	92.31	40	97.56	93.02	36	4	97.30	92.31
AE e	16	50	8	8	3	37.50	60.00	33.33	50.00	3	37.50	60.00	1	5	33.33	50.00
UN Q	33	50	17	16	0	-	-	-	-	0	-	-	0	5	-	-
Σ	16110108	22	24100	86008	85561	99.48	99.48	99.72	99.72	85583	99.51	99.51	84758	1050	99.76	99.76

A táblázat oszlopai: aritmia osztály és annotáció; a feldolgozott szívritűések teljes száma; a tanítóhalmoz teljes száma; a tanítóhalmoz aránya és elemszáma; a teszthalmoz elemszáma; a valódi pozitívok (TP), szenzitivitás (Se), pozitív prediktivitás (+P) a Bayes-fúzió (I. stratégia) szerint; TP, az elutasítottak száma (R), Se, +P az elutasításos fúzió szerint (I. stratégia); ugyanezek a III. stratégia szerint.

2.7. Összefoglalás

Kifejlesztettem egy új, páciens-specifikus modellezésen alapuló szívütés-osztályozási módszert, melynek eredménye meghaladja a korábbi eljárásokét. A módszertannal a következő új eredményeket értem el:

1. Kidolgoztam egy adaptív szegmentálási technikát a szívütésekre bontáshoz, amely a korábbi módszerek előnyeinek megőrzése mellett azoknál megbízhatóbb eredményt nyújt.
2. Kifejlesztettem egy páciens-alapú pólusoptimalizációs eljárást a szívütések modellezésére. Az így kapott adaptív racionális transzformáció a szívütések jó közelítését, és morfológiailag releváns reprezentációját adják.
3. Javasoltam egy adaptív kezdőpontválasztási stratégiát az optimalizációhoz, melynek segítségével növelhető a pólusoptimalizálás hatékonysága.
4. Kibővítettem az osztályozáshoz használt jellemzővektort a pólusszögekkel mint globális morfológiai jellemzőkkel.
5. Többféle stratégia fúzióját javasoltam az osztályozási pontosság növeléséhez.

Az eredményeket a [BogFri18; BogFri19a; DozBogKov19] cikkekben közöltem. A javasolt módszereknek közvetlen orvosi alkalmazása lehet klinikai, és okoseszközök terén is, automatikus elemzési lépésként segítve a kardiológusok munkáját. További kutatási célkitűzés lehet a módszerek valósidejű alkalmazása, illetve az osztályozási eredmények további pontosítása a páciensek speciális adottságainak figyelembe vételével.

3. fejezet

EKG szegmentálás és diagnosztikai mennyiségek kinyerése

A fejezetben az EKG szívütések hullámformáinak szegmentálására, és a hullámformák modellezésére kidolgozott eredményeimet mutatom be. Munkám során az adaptív racionális transzformáció segítségével történő szegmentálás lehetőségeit vizsgáltam. Kifejlesztettem egy transzformációs technikát, amelynek segítségével a hullámformák morfológiailag pontos reprezentációját kapjuk, illetve lehetővé válik a kritikus pontok detektálása [BogFri19b]. A racionális modellgörbék analitikus vizsgálata alapján matematikai modellt adtunk a kritikus pontok meghatározására, valamint az inverzprobléma, a kritikus pontok, illetve diagnosztikai mennyiségek alapján történő szívütés-szintézisre is, a QRS komplexus példáján keresztül bemutatva [BogSch18]. A témakört ezen két cikk alapján tárgyalom, kitérve a felmerült nehézségekre és szempontokra is.

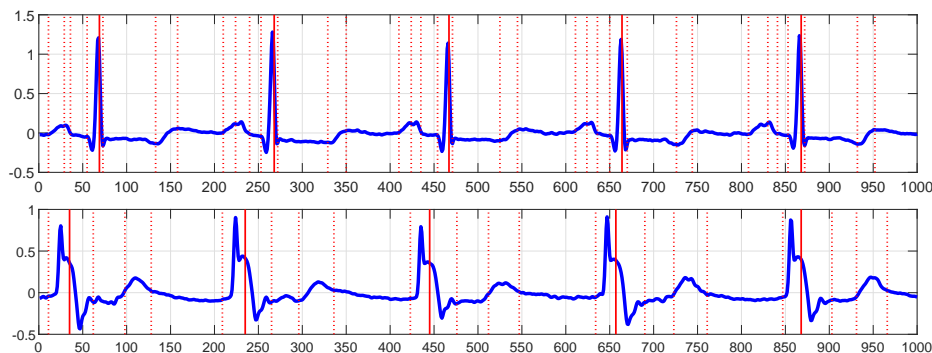
3.1. Problémafelvetés és előzmények

Az EKG jel szívütésekre, ezen belül pedig P, QRS, T hullámformákra osztható a *2.1. EKG feldolgozás* fejezetben bemutatott módon. Az EKG szegmentálás feladata a szívütések hullámformákra történő automatikus szétbontása, egyes hullámformákat külön-külön jellemző modellgörbék kinyerése, valamint a hullámformák kritikus pontjainak (kezdő-, csúcs-, és végpontjainak) detektálása. A szegmentálásnak számos orvosi alkalmazása lehetséges: lehetőséget ad a hullámformák morfológiájának egymástól független vizsgálatára, valamint további diagnosztikai mennyiségek származtatására (pl.: VAT, QRS hossz, QTc). Ezen információk egyes szívütésekre történő kiértékelése rendkívül humánerőforrás-igényes, egy automatikus kiértékelés elősegítheti ezen jellemzők kvantitatív kiértékelését. Ezáltal képet kaphatunk a páciens szívének általános, illetve egyes szívütésekre vonatkozó kondíciójáról, nyo-

mon követhetők az öregedési folyamat hatására fellépő változások, de akár egyes rendellenességek is detektálhatóak. Az eredmények objektív kiértékelésének, és a szakirodalom más eredményeivel történő összehasonlításnak az alapja a QT adatbázis, melynek szívütséit kardiológusok annotálták a hullámformák kezdő, csúcs, és végpontjainak bejelölésével (lásd 3.1. ábra). Habár az adatbázis kiemelkedő jelentőségű az algoritmusfejlesztés szempontjából, jól jelzi a probléma nehézségét és rosszul definiáltságát: a kardiológusok annotációi között szisztematikus és véletlenszerű különbségeket fedezhetünk fel. Ez a fajta szubjektivitás és bizonytalanság, amely ugyan nem feltétlenül befolyásolja az orvosi diagnózist, megnehezíti az automatikus, objektív kiértékelést. Megjegyzendő azonban, hogy a szakirodalomban a hullámformák szegmentálását többnyire csak normális szívütsékre értelmezik, révén az abnormális esetekhez a szívütsés morfológiájának teljes megváltozása is társulhat (lásd pl. 2.9. ábra), amely esetben nehezen, vagy egyáltalán nem értelmezhetőek az egyes hullámformák. A QT adatbázist is ennek megfelelően alakították ki: az egyes felvételek csak egyes kiválasztott, normális jellegű szívütséinek kritikus pontjait annotálták.

Az adaptív racionális transzformáció klasszifikációra történő felhasználásának előzményeként a 2.3. *Racionális rendszerek az EKG feldolgozásban* fejezetben ismertetett korábbi eredményekre hivatkozok. Ezen eredmények mutatják, hogy az EKG jelek hatékonyan modellezhetőek racionális rendszerekkel, továbbá a modellek alapján számos alkalmazás válik lehetővé. Az osztályozás szempontjából azért ígéretes a racionális transzformáció, mert egy, a jelhez illeszkedő approximációját adhatja a szívütséseknek, mely egyrészt természetes dimenziócsökkentés, másrészt lehetővé teszi morfológiai jellemzők származtatását.

A racionális rendszerekkel történő modellezés, és az adaptív racionális transzformáció szegmentálásra történő alkalmazásának motivációi a 2. *EKG szívütsés-osztályozás* fejezetben tárgyalt eredmények. A szegmentálás szempontjából azért ígéretesek a racionális rendszerek, mert egyrészt egyszerű analitikus modelljét biztosítják a szívütséseknek. Másrészt a rendszer felépítése miatt megfelelő pólusazonosítás mellett a modellszámra elemi komponensei közvetlenül biztosítják a hullám-



3.1. ábra. Hullámformák kezdő-, csúcs-, és végpontjainak annotációi

Adatok forrása: QT Database

formákra bontást. További szakirodalmi előzmények közül a három legjelentősebb eredmény, melyekkel összehasonlítást végeztem: [LagJanCam94] aluláteresztő deriválósűrűn (*LPD – low-pass differentiator*), [Mar+04] waveleteken, és [Kov+17] Hermite-függvényeken alapuló munkái.

3.2. A QRS komplexus modellezése

Az alfejezetben a QRS komplexus racionális függvényekkel történő modellezésének lehetőségét, és az alapján a kritikus pontok egy lehetséges származtatására kidolgozott modellt ismertetem. Az EKG szívütések racionális függvényekkel történő approximációjának alapötletét a racionális alap- és elemi függvények, valamint az EKG hullámformák között észlelt hasonlóság adja. Ezen motiváció alapján a hullámformák modellezését adott rendű racionális alapfüggvénnyel, vagy adott multiplicitású elemi racionális függvénnyel végezhetjük. Tekintsük most az első megközelítést egyetlen elvezetés QRS komplexusának modellezésére, azaz $a \in \mathbb{D}$ inverzpólus, $n \in \mathbb{N}^+$ rend, és $c \in \mathbb{C}$ együttható mellett a modellgörbe legyen

$$E(t) := \operatorname{Re} \left(c \cdot r_a^n(e^{it}) \right) = \operatorname{Re} c \cdot \operatorname{Re} r_a^n(e^{it}) - i \cdot \operatorname{Im} c \cdot \operatorname{Im} r_a^n(e^{it}) \quad (t \in [-\pi, \pi])$$

alakú. A gyakorlati alkalmazás szempontjából adott QRS komplexus jelének reprezentációjához a $c \in \mathbb{C}$ együtthatók az $L^2(\mathbb{T})$ -beli legkisebb négyzetes közelítés alapján határozandók meg, az $a \in \mathbb{D}$ inverzpólus és $n \in \mathbb{N}^+$ rend pedig valamilyen a priori információ alapján, vagy pólusoptimalizálás útján.

3.2.1. A modellgörbe tulajdonságai

Vizsgáljuk meg először a modellgörbék szerkezetét, illetve vezessük be a modellgörbék egy ekvivalens, normalizált változatát. Ehhez tekintsük az

$$\tilde{r}_a := (1 - |a|) \cdot r_a \quad (a \in \mathbb{D}) \quad (3.1)$$

normalizált racionális függvényeket, melyekre

$$\max_{z \in \mathbb{T}} |\tilde{r}_a(z)| = 1.$$

Az E modellgörbe tekintetében az alapfüggvény normalizálása csak a c együttható változtatását jelenti:

$$E(t) = \operatorname{Re} \left(\tilde{c} \cdot \tilde{r}_a^n(e^{it}) \right) \quad (\tilde{c} := c/(1 - |a|); t \in [-\pi, \pi]).$$

Ugyanakkor, mivel a modellgörbék geometriai vizsgálatára készülünk, ahol a célkitűzés a görbe kritikus pontjainak detektálása, E és λE ($\lambda \in \mathbb{R}$) vizsgálata ezen szempontokból ekvivalens. Tegyük fel tehát, hogy a $\tilde{c} \in \mathbb{C}$ együtttható egységnyi: $|c| = 1$. Ekkor alkalmas $\theta \in [-\pi, \pi)$ együttthatóval $c = e^{-i\theta}$, és tekintsük a

$$E_\theta(t) := \operatorname{Re} \left(e^{-i\theta} \tilde{r}_a^n(e^{it}) \right) = \operatorname{Re} \left(\tilde{r}_a^n(e^{it}) \right) \cos \theta + \operatorname{Im} \left(\tilde{r}_a^n(e^{it}) \right) \sin \theta \quad (t \in [-\pi, \pi))$$

modellgörbét (lásd 3.2. ábra).

A következőkben megadjuk a modellgörbe egy, a gyakorlatban jobban használható alakját, a racionális alapfüggvényt polárrepresentáció segítségével előállítva. Jelölje $\rho \in [0, 1)$ az $a \in \mathbb{D}$ inverzpólus nagyságát, és $\alpha \in [-\pi, \pi)$ a szögét, vagyis tekintsük az inverzpólus $a = \rho e^{i\alpha}$ polárkoordinátás alakját. Az \tilde{r}_ρ függvény magnitúdó és argumentumfüggvénye

$$M_\rho(t) := \frac{|1 - \rho|}{|1 - \rho e^{it}|}, \quad \omega_\rho(t) := \frac{\gamma_\rho(t) - t}{2} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad (3.2)$$

azaz az alapfüggvény

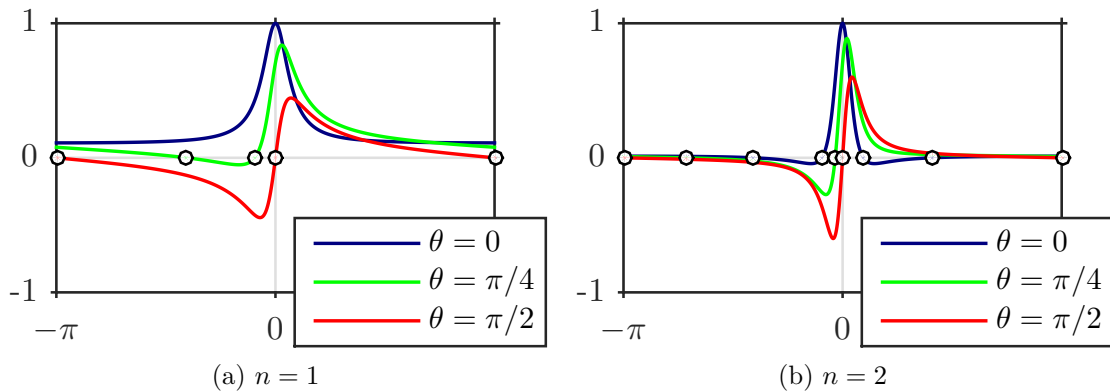
$$\tilde{r}_\rho(e^{it}) = M_\rho(t) e^{i\omega_\rho(t)} \quad (t \in \mathbb{R})$$

polárkoordinátás alakban írható. Megjegyzendő, hogy a γ_ρ függvényhez hasonlóan (lásd (1.18)), M_ρ is kifejezhető a Poisson-féle magfüggvény segítségével:

$$M_\rho(t) = \sqrt{\frac{1 - \rho}{1 + \rho} P_\rho(t)}, \quad \omega_\rho(t) = \frac{1}{2} \int_0^t (p_\rho(\tau) - 1) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

A polárrepresentáció alapján a modellgörbe

$$E_\theta(t) = \operatorname{Re} \left(e^{-i\theta} \tilde{r}_a^n(e^{it}) \right) = \operatorname{Re} \left(e^{-i\theta} \tilde{r}_\rho^n(e^{it}) \right) = \operatorname{Re} \left(M_\rho^n(t) e^{i(n\omega_\rho(t) - \theta)} \right) =$$



3.2. ábra. Példák az E_θ modellgörbére ($a = 0.8$)

$$= M_\rho^n(t) \cos(n\omega_\rho(\tau) - \theta) \quad (\tau := t - \alpha; t \in [-\pi, \pi]) \quad (3.3)$$

alakban írható.

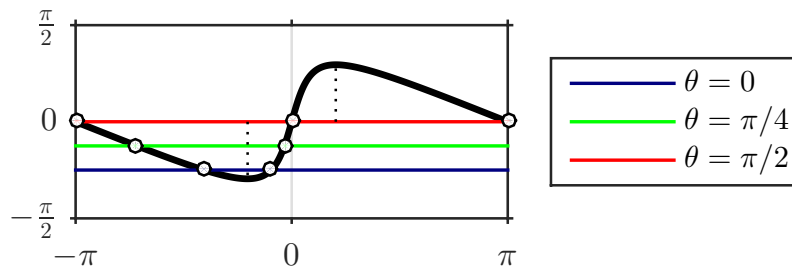
3.2.2. Kritikus pontok származtatása

A modellgörbe vizsgálata lehetőséget ad a QRS komplexus kritikus pontjainak analitikus meghatározására, illetve becslésre. Fiziológiai szempontból az EKG hullámformák kezdő- és végpontja az alapvonaltól történő eltérés, illetve az alapvonatra történő visszatérés helyének feleltethető meg, a csúcs pedig a hullámforma legmagasabb értékének. Ez alapján a kritikus pontok kapcsolatba hozhatóak a QRS komplexus jelének zérus-, illetve szélsőértékhelyeivel. A következőkben a modellgörbe zérus- és szélsőértékhelyeinek lehetséges kiszámítását ismertetem. A modellgörbe ismeretében tehát (az esetleges approximációs hibát figyelembe véve közelítőleg) meghatározhatók a QRS komplexus kritikus pontjai, illetve ezek alapján más jellemzőmennyiségek is közvetlenül származtathatóak. A modell gyakorlatban történő alkalmazhatóságát a 3.3. *Paraméterrekonstrukció* alfejezetben tárgyalom.

Zérushelyek. Az E_θ modellgörbe zérushelyei (lásd 3.2. ábra) meghatározhatóak a (3.3) alak alapján:

$$\begin{aligned} E_\theta(t) = 0 &\stackrel{\tau:=t-\alpha}{\iff} n\omega_\rho(\tau) - \theta = \frac{\pi}{2} - k\pi \iff \\ &\iff \omega_\rho(\tau) = \underbrace{\frac{2\theta - (2k-1)\pi}{2n}}_{=:\xi_k} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

A zérushelyek diszkussziójához tekintsük az egyenletek megoldásainak számát. Az ω_ρ függvény viselkedése a $[-\pi, \pi)$ intervallumon (lásd 3.3. ábra) egyszerűen jellemezhető: a $-\pi$ és 0 pontokban vannak zérushelyei, továbbá a $\tau_0 := \arccos \rho \in (0, \pi)$ és $-\tau_0$ pontokban lokális és egyben globális szélsőértékei, melyek meghatározzák értékkészletét. Ez utóbbi könnyen ellenőrizhető az ω_ρ és p_ρ közötti kapcsolat alapján. Tehát az egyes egyenleteknek legfeljebb két megoldása lehet a $[-\pi, \pi)$ intervallumon, melyek tényleges száma ξ_k és ω_ρ értékkészletének viszonyától függ. Mivel tetszőle-



3.3. ábra. Az ω_ρ függvény viselkedése, és az $\omega_\rho(\tau) = \xi_1$ gyökei ($n = 2$, $\rho = 0.8$)

ges $\rho \in (0, 1)$ paraméter esetén $\omega_\rho(\tau) \in [-\pi/2, \pi/2]$ ($\tau \in \mathbb{R}$), így a megoldhatóság szükséges feltétele $\xi_k \in [-\pi/2, \pi/2]$, amely θ -tól függően \mathbb{Z} egy legfeljebb n elemű halmazára teljesül. Ez egyrészt leszűkíti k lehetséges értékeit, másrészt leolvasható belőle, hogy E_θ -nak legfeljebb $2n$ zérushelye van $[-\pi, \pi)$ -n. Gyakorlati szempontból tekintve az $\omega_\rho(\tau) = \xi$ ($\xi \in [-\pi/2, \pi/2]$) típusú egyenletek megoldása, és így az E_θ zérushelyei explicit módon meghatározhatók. Speciális esetként tekintsük az $n = 2$ rendet, $\theta > 0$ feltevés mellett. Ekkor a két egyenlet

$$\omega_\rho(\tau) = \xi_1 = \frac{\theta - \pi/2}{2}, \quad \omega_\rho(\tau) = \xi_2 = \frac{\theta - 3\pi/2}{2}$$

alakú.

Szélsőérték helyek. Az E_θ függvény lokális szélsőérték helyeinek (lásd 3.4. ábra) meghatározásához tekintsük először a racionális alapfüggvények és E_θ deriváltjait:

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{r}_\rho^n(e^{i\tau}) = \frac{in\rho e^{i\tau}}{1-\rho} \tilde{r}_\rho^{n+1}(e^{i\tau}) = \frac{n\rho M_\rho^{n+1}(\tau)}{1-\rho} e^{i((n+1)\omega_\rho(\tau) + \tau + \pi/2)} \quad (\tau \in \mathbb{R}),$$

és

$$\begin{aligned} E'_\theta(t) &= \operatorname{Re} \left(e^{-i\theta} \frac{d}{d\tau} \tilde{r}_\rho^n(e^{it}) \right) = \frac{n\rho M_\rho^{n+1}(\tau)}{1-\rho} \operatorname{Re} \left(e^{i((n+1)\omega_\rho(\tau) + \tau + \pi/2 - \theta)} \right) = \\ &= \frac{n\rho M_\rho^{n+1}(\tau)}{1-\rho} \cos((n+1)\omega_\rho(\tau) + \tau + \pi/2 - \theta) \quad (\tau := t - \alpha; t \in [-\pi, \pi)). \end{aligned}$$

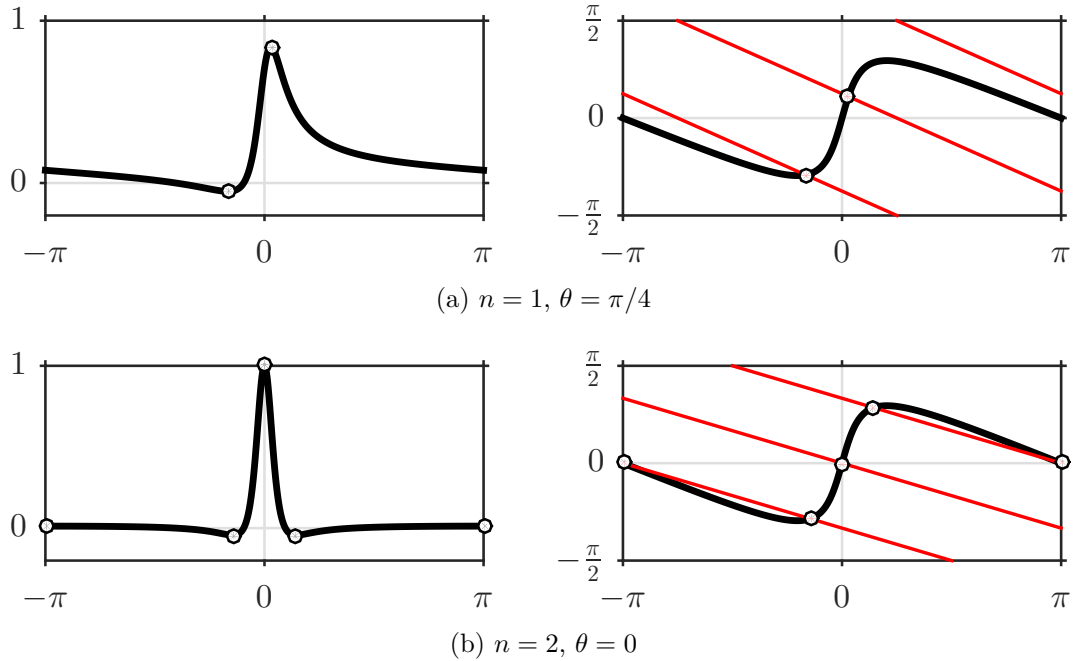
Ez alapján E_θ stacionárius pontjai meghatározhatóak:

$$\begin{aligned} E'_\theta(t) = 0 &\iff_{\tau:=t-\alpha} (n+1)\omega_\rho(\tau) + \tau + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff \\ &\iff \omega_\rho(\tau) = -\frac{\tau}{n+1} + \underbrace{\frac{\theta + k\pi}{n+1}}_{=:\xi_k} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned} \quad (3.4)$$

A szélsőérték helyek diszkusszióját a zérushelyekéhez hasonló módon végzem. Vezessük be az

$$\omega_\rho^*(\tau) := \omega_\rho(\tau) + \frac{\tau}{n+1} \quad (\tau \in \mathbb{R})$$

függvényt, melynek viselkedése és értékkészlete vizsgálandó a $[-\pi, \pi)$ intervallumon. Meggondolható, hogy $\rho \in (0, 1/n]$ esetén ω_ρ^* szigorúan monoton csökkenő, és értékkészlete $[-\pi/(n+1), \pi/(n+1))$. Ha viszont $\rho \in (1/n, 1)$, akkor ω_ρ^* -nak a $[-\pi, \pi)$ intervallumon valamely $\tau_0 \in (0, \pi)$ és $-\tau_0$ pontokban lokális és egyben globális szélsőértékei vannak, melyek meghatározzák értékkészletét. A fentihez hasonló megfontolás alapján az egyes egyenleteknek legfeljebb két megoldása van $[-\pi, \pi)$ -n, E'_θ -nek pedig legfeljebb $2n+2$, amely egyben E_θ szélsőérték helyeinek lehetséges maximális száma. Itt az $\omega_\rho^*(\tau) = \xi$ ($\xi \in [-\pi/2, \pi/2]$) típusú egyenletek megoldása n növe-

3.4. ábra. Példák az E_θ függvény lokális szélsőérték helyeire ($\rho = 0.8$)

lésével már problémás lehet, a trigonometrikus alak nehezen kezelhetővé válik, a Blaschke-függvényekkel képzett

$$\begin{aligned} \omega_\rho^*(\tau) = \xi &\iff \gamma_\rho(\tau) = \frac{n-1}{n+1}\tau + 2\xi \implies \\ \implies B_\rho(z) &= z^{(n-1)/(n+1)} \cdot e^{i2\xi} \quad (z = e^{i\tau}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

algebrai alak megoldásához pedig egy $2n$ fokú polinomegyenlet megoldása szükséges. Ezért, a gyakorlati alkalmazás szempontjából, ha az $a \in \mathbb{D}$ inverzpólus és $\theta \in [-\pi, \pi)$ adott, akkor az egyenletek numerikus megoldását javaslom, például az intervallumfelezés többszöri alkalmazásával a zérushelyek által meghatározott intervallumokon.

3.3. Paraméterrekonstrukció

Az előző alfejezetben a QRS komplexus egy lehetséges racionális modellezését tárgyaltam, amely lehetőséget ad a kritikus pontok, és így diagnosztikai mennyiségek (pl.: VAT, és QRS hossz) meghatározására. Felmerül ugyanakkor az inverzprobléma, vagyis a modell paramétereinek rekonstrukciója a diagnosztikai mennyiségek alapján. A probléma vizsgálata két szempontból is érdekes. Egyrészt lehetőséget ad olyan QRS komplexusok szintézisére, melyek pontosan megfelelnek a megadott diagnosztikai mennyiségeknek. Másrészt egy alternatív pólusazonosítási módszert is eredményez, melynek során nem optimalizálás, hanem (az egyéb módszerrel kinyert) kritikus pontok alapján, azokra illeszkedően határozhatjuk meg a rendszer para-

métereit. Ez egyes morfológiai információk explicit reprezentációját eredményezi, ugyanakkor nem feltétlenül biztosítja a QRS komplexus egészének approximációját.

3.3.1. Rekonstrukció a csúcsok alapján

A QRS komplexus Q, R, és S csúcsainak helyzete alapján történő rekonstrukciójának három speciális esetét vizsgáltuk meg, melynek során a csúcsok helyeit a modellgörbe szélsőértékhelyeinek feleltetjük meg. A racionális alapfüggvény rendjét a vizsgálatok során $n = 2$ -nek választottuk, amely már elég bonyolult a QRS komplexus morfológiájának leírásához, és számos gyakorlati esetben is a QRS komplexus megfelelő approximációját kapjuk vele. Az eredmények azonban természetes módon kiterjeszthetők magasabb rendre is.

Szimmetrikus eset. Tekintsük először a $\theta = 0$ esetet, vagyis tegyük fel, hogy az E_θ modellgörbe szimmetrikus, azaz páros jellegű függvény (lásd 3.5. ábra (a)). A görbe szimmetriatengelye ekkor az $a = \rho e^{i\alpha} \in \mathbb{D}$ inverzpólus $\alpha \in [-\pi, \pi)$ pólusszögétől függ. Mivel a pólusszög megváltoztatása a racionális alapfüggvény időbeli eltolását jelenti, feltehetjük, hogy a pólusszögre $\alpha = 0$, és vizsgálhatjuk az $a = \rho \in (0, 1)$ leszűkítést. Ez a szimmetriatengely origóban történő elhelyezését jelenti, amely egyúttal meghatározza az R-csúcs $t_0 = 0$ helyét. Tegyük fel, hogy a Q és az S-csúcsok $t_1 \in (-\pi, 0)$ és $t_2 \in (0, \pi)$ helyei ismertek, melyekre a szimmetria miatt $t_2 = -t_1$ teljesül. Az E_0 modellgörbét a két csúcs alapján határozzuk meg, biztosítva, hogy ezen pontokban lokális minimumhelye legyen. Megjegyzendő, hogy a modell konzisztens, mivel a modellgörbének a szimmetria miatt $t_0 = 0$ -ban maximumhelye van, amely megfelel az R-csúcsnak. Az egyetlen meghatározandó paraméter tehát a $\rho \in (0, 1)$ pólusnagyság. Tekintsük a (3.4) egyenleteket $k = 1$ választásával:

$$\frac{\gamma_\rho(t_2) - t_2}{2} = \omega_\rho(t_2) = -\frac{t_2}{3} + \frac{\pi}{3} \iff 2 \arctan\left(\frac{1 + \rho}{1 - \rho} \tan\left(\frac{t_2}{2}\right)\right) = \frac{t_2}{3} + \frac{2\pi}{3}.$$

Innen ρ meghatározható t_2 ismeretében:

$$\sigma_0 := \frac{1 + \rho}{1 - \rho} = \frac{\tan(t_2/6 + \pi/3)}{\tan(t_2/2)} \iff \rho = \frac{\sigma_0 - 1}{\sigma_0 + 1}$$

A $k = 1$ választás nem véletlen: könnyen látható, hogy az eredményként kapott $\rho \in (0, 1)$ teljesüléséhez $t_2 > 0$ esetén $k = 1 + 3m$ ($m \in \mathbb{Z}$) választás szükséges.

Antiszimmetrikus eset. Tekintsük most a $\theta = \pi/2$ esetet, vagyis tegyük fel, hogy az E_θ modellgörbe antiszimmetrikus, azaz páratlan jellegű függvény (lásd 3.5. ábra (b)). A szimmetrikus esethez hasonló megfontolás alapján feltehetjük, hogy a pólusszögre $\alpha = 0$. Itt viszont ez a szimmetriaközéppont origóban történő elhelyezését jelenti, amely most nem feleltethető meg az R-csúccsal. Tegyük most fel, hogy a Q

és R-csúcs $t_1 \in (-\pi, 0)$ és $t_2 \in (0, \pi)$ helyei ismertek, melyekre az antiszimetria miatt ismét $t_2 = -t_1$ teljesül. Az $E_{\pi/2}$ modellgörbét a két csúcs alapján határozzuk meg, biztosítva, hogy ezen pontokban lokális minimum-, illetve maximumhely legyen. Megjegyzendő, hogy a módszer kiterjeszhető arra az esetre is, ha az R és S-csúcsok helye adott. A meghatározandó paraméter megint a $\rho \in (0, 1)$ pólusnagyság, melyhez tekintsük most a (3.4) egyenleteket $k = 0$ választásával:

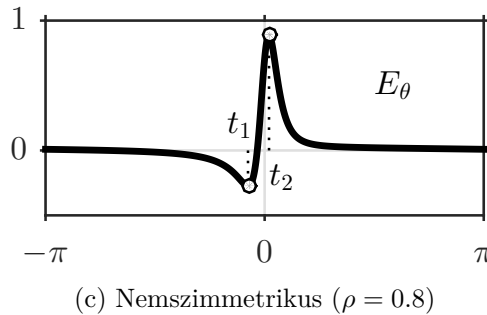
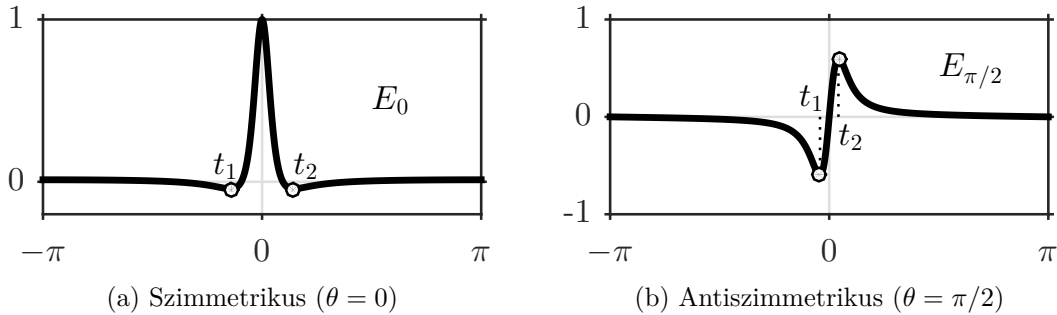
$$\frac{\gamma_\rho(t_2) - t_2}{2} = \omega_\rho(t_2) = -\frac{t_2}{3} + \frac{\pi}{6} \iff 2 \arctan\left(\frac{1+\rho}{1-\rho} \tan\left(\frac{t_2}{2}\right)\right) = \frac{t_2}{3} + \frac{\pi}{3}.$$

Innen ρ ismét meghatározható t_2 ismeretében:

$$\sigma_0 := \frac{1+\rho}{1-\rho} = \frac{\tan(t_2/6 + \pi/6)}{\tan(t_2/2)} \iff \rho = \frac{\sigma_0 - 1}{\sigma_0 + 1}.$$

A $k = 0$ választás itt a $\rho \in (0, 1)$ feltétel teljesüléséhez szükséges (általánosan $k = 3m$ ($m \in \mathbb{Z}$) kell lennie), továbbá a $t_2 < \pi/2$ feltételnek is teljesülnie kell.

Nemszimmetrikus eset. A teljesen általános, mindhárom csúcsot figyelembe vevő eset tárgyalása előtt tekintsünk ismét egy leszűkített változatot: tegyük fel, hogy az antiszimmetrikus esethez hasonlóan a Q és R-csúcsok $t_1 \in (-\pi, 0)$ és $t_2 \in (0, \pi)$ helyei, valamint a $\rho \in (0, 1)$ pólusnagyság adott (lásd 3.5. ábra (c)). A rekonstruálható paraméter most az $\alpha \in [-\pi, \pi)$ inverzpólus és a $\theta \in [-\pi, \pi)$ paraméter. A (3.4) egyenleteket $k = -1, 0$ (R és S-csúcsok esetén $k = 1, 0$) választással tekintve a



3.5. ábra. Rekonstrukció a csúcsok alapján, speciális esetekben

következőt kapjuk ($j = 1, 2$):

$$\frac{\gamma_\rho(\tau_j) - \tau_j}{2} = -\frac{\tau_j}{3} + \frac{\theta}{3} + \xi_j \iff 2 \arctan\left(\frac{1+\rho}{1-\rho} \tan\left(\frac{\tau_j}{2}\right)\right) = \frac{\tau_j}{3} + \frac{2\theta}{3} + 2\xi_j,$$

ahol $\tau_j = t_j - \alpha$ ($j = 1, 2$), $\xi_1 = -\pi/3$, és $\xi_2 = 0$. Legyen $\sigma := (1 + \rho)/(1 - \rho)$, és $T_j := \tan(\tau_j/2)$ ($j = 1, 2$), ekkor az egyenletek az

$$\arctan(\sigma T_j) = \frac{\arctan(T_j)}{3} + \frac{\theta}{3} + \xi_j \quad (j = 1, 2) \quad (3.6)$$

alakot öltik. A két egyenlet kivonásával

$$\arctan(\sigma T_2) - \arctan(\sigma T_1) = \frac{t_2 - t_1}{6} + \xi_2 - \xi_1$$

adódik. Legyen $t_0 := t_2 - t_1$, $\xi_0 = \xi_2 - \xi_1$, ekkor

$$\arctan(\sigma T_2) - \arctan(\sigma T_1) = \frac{t_0}{6} + \xi_0$$

és

$$\frac{t_0}{2} = \frac{\tau_2 - \tau_1}{2} = \arctan(T_2) - \arctan(T_1).$$

A tangens függvény addíciós formuláit alkalmazva a

$$\frac{\sigma(T_2 - T_1)}{1 + \sigma^2 T_1 T_2} = \tan\left(\frac{t_0}{6} + \xi_0\right),$$

és a

$$\frac{T_2 - T_1}{1 + T_1 T_2} = \tan\left(\frac{t_0}{2}\right)$$

összefüggéseket kapjuk, melyek hányadosa már ismert:

$$\frac{1 + T_1 T_2}{1 + \sigma^2 T_1 T_2} = \frac{\tan(t_0/6 + \xi_0)}{\sigma \tan(t_0/2)} =: \sigma_0,$$

így

$$T_1 T_2 = \frac{1 - \sigma_0}{\sigma_0 \sigma^2 - 1} =: \kappa_1$$

és

$$T_2 - T_1 = \tan\left(\frac{t_0}{2}\right) (1 + \kappa_1) =: \kappa_2$$

adódik, melyekből T_1 és T_2 meghatározható. Végül, a θ paraméter a (3.6) egyenlet alapján, α pedig az

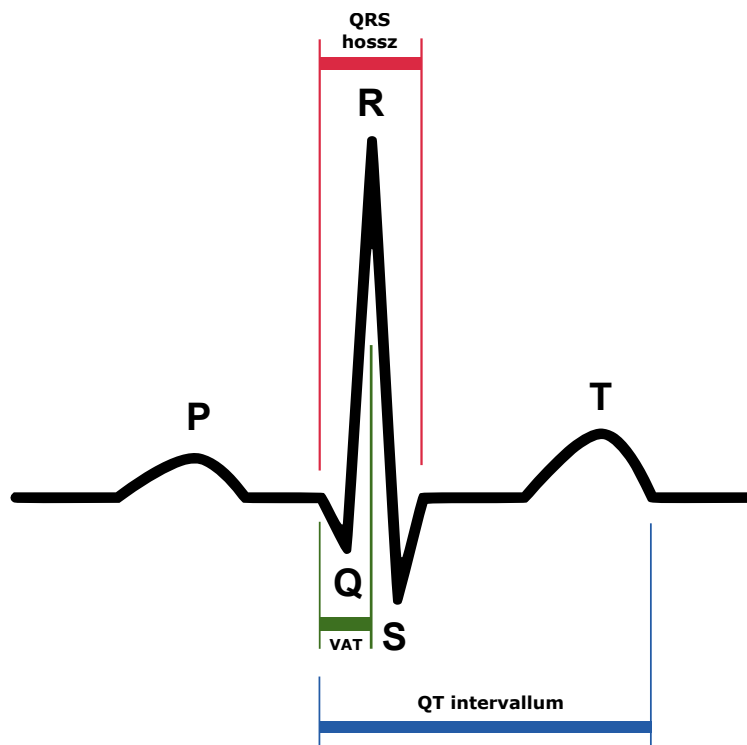
$$\arctan(T_1) = \frac{t_1 - \alpha}{2}$$

összefüggés alapján számítható.

Általános eset. Tegyük most fel, hogy a Q, R és S-csúcsok $t_0, t_1, t_2 \in (-\pi, 0)$ és $t_2 \in (0, \pi)$ helyei ismertek, és ezekre ne tételezzünk fel további, θ vagy a leszűkítéséből adódó megkötéseket. Ez az általános eset ugyan explicit megoldható, annak technikai jellege, és számos lehetséges variációi miatt itt csak a főbb gondolatmenetet ismertetem. A szélsőértékekre vonatkozó (3.4) egyenletek ugyanis most sajnos nem kezelhetők az előző esetekben ismertetett módon, viszont a (3.5) algebrai alakból a valós és komplex része már explicit előállítható. Kérdéses viszont az egyes egyenletekhez tartozó $k \in \mathbb{Z}$ paraméterek megválasztása, melyek különböző modellgörbéket generálhatnak. Az algebrai alak további hátránya, hogy a megoldásra csak $a \in \mathbb{C}$ teljesül, az $a \in \mathbb{D}$ feltételt nem biztosítja, ennek további vizsgálata szükséges. Indokolt lehet az explicit megoldás helyett annak numerikus közelítése, például a nemszimmetrikus esetre visszavezetve, azt egy ρ paraméterre történő optimalizációs problémaként megfogalmazva.

3.3.2. Rekonstrukció diagnosztika mennyiségek alapján

A paraméterrekonstrukció egy másik lehetősége a VAT és QRS hossz diagnosztikai mennyiségek alapján történő rekonstrukció. A ventrikuláris aktivációs időt itt a QRS komplexus kezdőpontja és az R-csúcs közötti időintervallumként, a QRS hosszt pedig a QRS komplexus kezdő- és végpontja közötti időintervallumként tárgyalom (lásd 3.6. ábra). Ezen pontokat a modellgöрге zérushelyeinek, és maximumhelyének



3.6. ábra. Egy normális szívütés néhány diagnosztikai mennyisége

Eredeti forrása: www.wikipedia.org

feleltetjük meg. Ez esetben azonban nemcsak szélsőérték helyek, hanem a zérushelyek alapján is végezzük a rekonstrukciót, így az kevésbé robosztussá válik, figyelembe véve az EKG jelek alapvonalának gyakorlatból ismert bizonytalanságát.

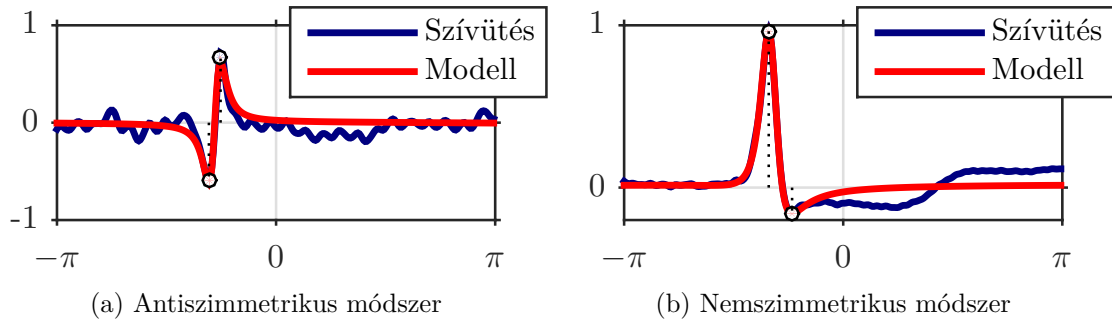
Tegyük fel tehát, hogy adott a $\delta_0, \delta_1 \in [-\pi, \pi)$ VAT, illetve QRS hossz. Hasonlóan a fenti általános esethez, itt is csak a megoldás fő gondolatmenetét ismertetem, annak technikai nehézségei miatt. Elsőként észrevehető, hogy az R-csúcs $t_0 \in [-\pi, \pi)$ helye tetszőlegesen megválasztható. A δ_0, δ_1 mennyiségek alapján ekkor a QRS komplexus zérushelyei származtathatóak, $t_1 := t_0 - \delta_0$ és $t_2 := t_1 + \delta_1$. A zérus- és szélsőértékekre vonatkozó egyenletek algebrai alakjából a $\theta \in [-\pi, \pi)$ paraméter, az $\alpha \in [-\pi, \pi)$ pólusszög, és a $\rho \in (0, 1)$ pólusnagyság már meghatározható explicit, illetve numerikus módon. A $k \in \mathbb{Z}$ paraméterek megválasztása itt is befolyásolja a kapott görbék alakját.

3.3.3. Kiértékelés valós EKG jeleken

A paraméterrekonstrukció viselkedését valós EKG jeleken, az MIT-BIH adatbázis kiválasztott felvételein is kiértékeltem. Olyan felvételeket választottam, ahol könnyen, és egyértelműen detektálhatóak voltak a QRS komplexus egyes csúcsai. A vizsgálat során a csúcsok alapján történő paraméterrekonstrukció segítségével kapott modellgörbe approximációs teljesítményét hasonlítottam össze egy numerikus optimalizálás útján kapott modellgörbe segítségével. Utóbbinál az inverzpólust a hiperbolikus Nelder–Mead módszerrel határoztam meg, a *2. EKG szívütés-osztályozás* fejezethez hasonló módon. A cél csak a QRS komplexus közelítése volt, így az optimalizálást és a kiértékelést csak az R-csúcs környezetére leszűkítve végeztem el. Az EKG jelek előfeldolgozását és szívütésekre osztását szintén a *2. EKG szívütés-osztályozás* fejezetben ismertetett módszerrel végeztem.

Az MIT-BIH #112 jelű felvételének V1 elvezetését, 2536 szívütést vizsgáltam az antiszimmetrikus módszerrel (lásd 3.7. ábra (a)). A kvantitatív kiértékeléshez az egyes szívütések rekonstruált, és optimalizálás útján kapott modellgörbéinek PRD értékeit számítottam ki és hasonlítottam össze. Megállapítható, hogy, a várakozásoknak megfelelően, a rekonstruált görbe némileg rosszabb approximációs tulajdonságokkal rendelkezik, de csak egy körülbelül kétszeres szorzó erejéig. A két PRD hányadosa átlagosan 2.2, statisztikailag vizsgálva pedig az átlagos PRD 50% a rekonstruált és 24% az optimalizált modellgörbe esetén, míg a szórása 11% és 5%. Figyelembe véve, hogy ezen felvétel jel-zaj aránya még a standard szűrés után is magas, ezek elfogadható értékeknek tekinthetők.

Az általános, nemszimmetrikus módszer kiértékelésére a #104 és #105 felvételek MLII elvezetését, 2589 szívütést vizsgáltam az előzőekben bemutatott módon (lásd 3.7. ábra (b)). A ρ pólusnagyságot egy extra optimalizációs lépés során határoz-



3.7. ábra. Szívütések rekonstruált modellgörbéi

Adatok forrása: MIT-BIH Database

tam meg, Nelder–Mead segítségével. Itt még biztatóbb eredmények mutatkoztak. A két PRD hányadosa átlagosan 1.5, az átlagos PRD 18% a rekonstruált és 12% az optimalizált modellgörbe esetén, a szórása pedig 9% és 5%.

Konklúzióként megállapítható, hogy az E_θ modellgörbe alkalmas egyes valós EKG jelek QRS komplexusainak modellezésére, és a paraméterrekonstrukció speciális esetekben az optimalizált modellel összemérhető approximációs teljesítményt nyújt. A teljes körű alkalmazáshoz, illetve a más hullámformákra történő kiterjesztéshez azonban érdemes a modellgörbe lehetséges továbbfejlesztéseit vizsgálni, a következő alfejezetben bemutatott módon.

3.4. Hullámformák modellezése

Az előző alfejezetekben ismertetett, gyakorlati példákkal alátámasztott, de alapvetően elméleti eredmények után a szívütés hullámformáinak együttes szegmentálásával foglalkoztam, a kidolgozott módszereket annotált valós adatokon, a QT adatbázison kiértékelve. A módszertan ismertetése előtt ismertetem a modellgörbe módosítását, melyet a szívütés összes hullámformájának szegmentálásához javasolok. Az osztályozás modelljéhez hasonlóan tekintsünk három inverzpólust rögzített, (1,4,1) multiplicitásokkal, azaz legyen a modellgörbe

$$E(t) := \operatorname{Re} \left(c_0 + \underbrace{c_1 \cdot r_{a_1}(e^{it})}_{=:E_1^*(t)} + \underbrace{\sum_{j=1}^4 c_{2j} \cdot r_{a_{2,j}}(e^{it})}_{=:E_2^*(t)} + \underbrace{c_3 \cdot r_{a_3}(e^{it})}_{=:E_3^*(t)} \right) \quad (t \in [-\pi, \pi)),$$

ahol $c_* \in \mathbb{C}$ az $L^2(\mathbb{T})$ -beli legkisebb négyzetes közelítés együtthatói, $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{D}$ pedig az inverzpólusok. A modell célja a P, QRS, és T hullámok morfológiailag helyes modellezése, a kritikus pontok detektálása céljából. Ennek megfelelően a modellgörbe E_1^*, E_2^*, E_3^* komponensei a P, QRS, és T hullámok modellezését szolgálják,

a tényleges modellszögfüggvényeket a

$$E_k(t) := \operatorname{Re} \left(E_k^*(t) - \int_{-\pi}^{\pi} E_k^* \right) \quad (t \in [-\pi, \pi), k = 1, 2, 3)$$

normalizálással kaphatjuk. A modell megválasztásának indoklásához tekintsük az előző alfejezetek modelljeit, valamint szívütés-osztályozás során szerzett tapasztalatokat. Bizonyítottuk, hogy racionális alap- és elemi függvények segítségével modellezhető a QRS komplexus, amely kiterjeszthető P és T hullámokra is. Az elemi függvények választása esetenként előnyösebb lehet az alapfüggvények használatánál, mivel összetettebb módon, a hullámformák részletgazdagabb leírását teszik lehetővé, ezért javaslom itt a QRS komplexus modellezését is adott multiplicitású elemi függvények segítségével. Az inverzpólusok multiplicitását illetően a cél ismét a lehető legalacsonyabb rend használata, amely tartalmazza a releváns információkat. A gyakorlati tapasztalat azt mutatta, hogy a szegmentálás szempontjából a QRS komplexus negyedrendű pólussal történő reprezentációja szükséges, míg a P és T hullámok esetén elegendő az elsőrendű pólus. Sőt, magasabb rend esetén már a szegmentálás szempontjából nem kívánt részletek is megjelenítésre kerülhetnek, amely negatívan befolyásolja a kritikus pontok detektálásának pontosságát. Munkám során vizsgáltam más multiplicitásokat $((1,2,1), (2,4,2), (1,4,2), (2,8,2), \dots)$, viszont a QT adatbázis alapján az $(1,4,1)$ nyújtotta a hullámformák leghatékonyabb reprezentációját, és eredményezte a legnagyobb detektálási pontosságot.

3.5. Szegmentálási módszertan

A szívütések szegmentálására a fenti modell alapján javasolok módszertant a QT adatbázison történő kiértékelésére. A kidolgozott eljárás a következő lépésekből áll: előfeldolgozás és szívütésekre bontás, modellezés és hullámformákra bontás, kritikus pontok detektálása, és az adatbázison történő kiértékelés. A módszertan ismertetésénél több helyen utalok az előző fejezetben bemutatott szívütés-osztályozás módszertanára, kiemelve a két alkalmazás közötti különbségeket.

3.5.1. Előfeldolgozás és szívütésekre bontás

Az első lépés több különálló célt szolgál, melyeket viszont együtt tárgyalok azok kapcsolata miatt. Ezen célok a zaj és artifaktumok szűrése, a szívütés kezdő- és végpontjának közelítő meghatározása, és azok előkészítése a pólusazonosításhoz. Bár az EKG jelek szűrése sztenderd technikának számít az alkalmazások során, a hullámformák szegmentálásához a szűrést sokkal körültekintőbben kell elvégezni, mint

például a szívütés-osztályozás során, mivel a jelenlévő zaj (elsősorban az alapvonal-vándorlás) döntően befolyásolhatja a kritikus pontok detektálásának pontosságát.

Tekintsük először a szívütésekre bontás kérdését. A *2. EKG szívütés-osztályozás* fejezetben rögzített ablakok adaptív használatát javasoltam, amely egy egyszerű megközelítés segítségével eredményez jól használható szívütés-szegmenseket. A módszert itt geometriai szempontból vizsgáltam felül, és az esetleges átlapolódás miatt levágásra (0-val való feltöltésre) kerülő részek további simítását javaslom a szívütés-szegmensek elején és végén, az alapvonalba történő pontosabb illeszkedés érdekében.

A *2. EKG szívütés-osztályozás* fejezethez hasonlóan, az EKG jelek szűrését aluláteresztő szűrővel, és waveletalapú alapvonal-vándorlás detektorral végeztem. A kritikus pontok detektálásához viszont szükséges az alapvonal pontos ismerete, így a módszer továbbfejlesztése volt szükséges. A waveletalapú detektor ugyanis az egész felvétel figyelembe vételével működik, és globális szempontból eredményesen távolítja el az alapvonalat, viszont a tapasztalat szerint az egyes szívütésekre nézve lokális problémák maradhatnak fenn. Ilyenek lehetnek a továbbra is fennálló lineáris jellegű trendek, illetve az ST depresszióhoz hasonló jelenségek, a P és a T hullám alapvonalának különbségei. Ezek kiküszöbölésére az alapvonal-vándorlás egy képlépcsős szűrését javaslom: az első (globális) lépésben a waveletalapú szűrő alkalmazását, a második (lokális) lépésben pedig az egyes szívütések R-csúcsot megelőző és követő részeinek lineáris korrekcióját.

A racionális modellgörbe pontossága az inverzpólusok meghatározásának pontosságától függ, melyet a következőkben ismertetek. A modell helyességéhez szükséges, hogy a modellgörbe három komponense valóban a P, QRS, és T hullámot közelítse. Ez, figyelembe véve az elemi racionális függvények időben lokalizált viselkedését, a pólusszög pontos, a hullámformák helyével korreláló meghatározását követeli meg. Ugyanakkor a csupán az approximációs hibán alapuló pólusoptimalizálás nem feltétlenül teljesíti ezt a reprezentációs elvárást, mivel a QRS komplexus amplitúdója jellemzően sokkal nagyobb, mint a P és T hullámé. Így a teljes szívütésre vonatkozóan esetenként nagyobb approximációs pontosság érhető el, ha a QRS komplexus approximációját több elemi hullámmal végezzük. Ezáltal viszont lehetséges, hogy a P vagy T hullám nem, vagy csak részben kerül reprezentálásra. A jelenség kiküszöbölése lehetséges a célfüggvény finomhangolásával, a keresési tér leszűkítésével, illetve az optimalizáló módszer módosításával is. Itt a szívütések adaptív előkészítését javaslom a pólusszög meghatározásához, melyet a P, QRS, és T hullám amplitúdójának becslésével, és normalizálásával érek el. Az így normalizált jelen történő pólusoptimalizálás tulajdonképpen megfeleltethető a célfüggvény szívütés-adaptív módosításának, eredményeképpen a pólusszög meghatározása stabilabbá válhat.

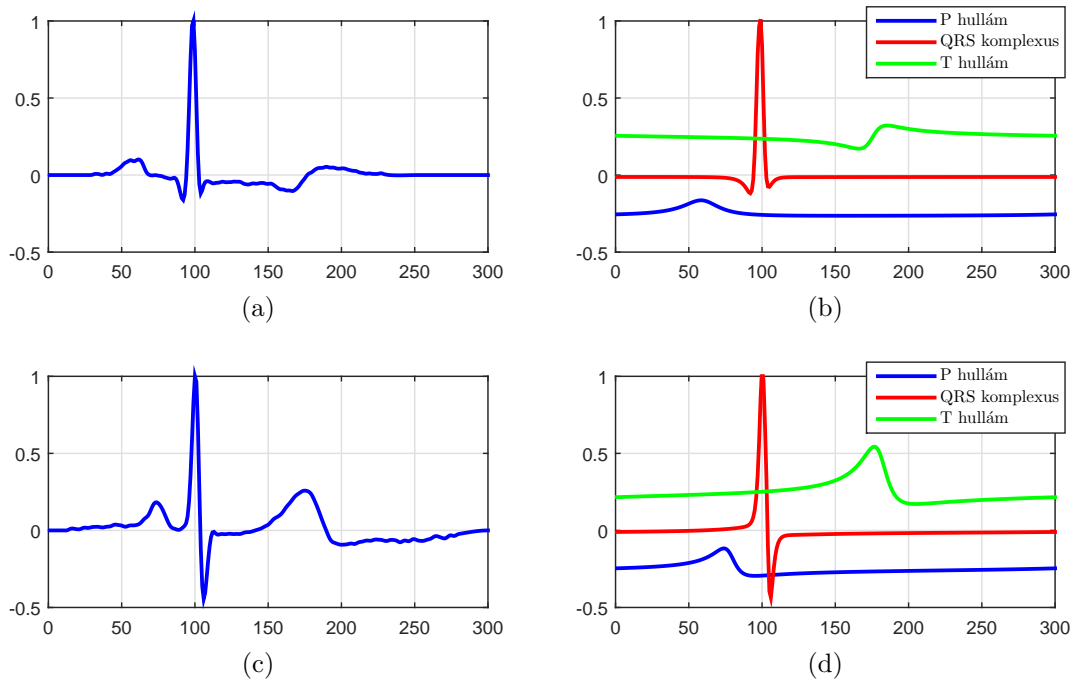
3.5.2. Modellezés és hullámformákra bontás

A szívütések és a hullámformák modellezésére egy adaptív racionális transzformációt javasolok, a 3.4. *Hullámformák modellezése* fejezetben bevezetett modellgörbék alapján. A modell kulcsfontosságú lépése az inverzpólusok meghatározása, melyhez a következőket fontoltam meg, kiindulva a szívütés-osztályozás során szerzett tapasztalatokból. Az osztályozásnál tárgyaltam a páciens-adaptív pólusválasztás lehetőségét és előnyeit, vagyis amikor az adott felvétel összes szívütését ugyanazon póluskombináció segítségével modellezzük. Ekkor a póluskombináció a páciens szív működésének általános jellemzője, az egyes szívütésekben megjelenő varianciát pedig az együtthatók kompenzálják. A szívütés-osztályozás során előny a páciens egyes szívütéseinek összehasonlíthatósága a közös bázis révén. A szegmentálás során viszont a görbék geometriai jellemzőit keressük, így hangsúlyosabb az egyes szívütések közötti variancia. Ezért, hasonlóan a tömörítés problémaköréhez (lásd [Kov16; KovFriSch19]), indokolt lehet a szívütésenkénti egyedi póluskombináció használata.

A pólusoptimalizációra egy hibrid megoldást, egy kétlépcsős optimalizálási módszert javasolok, figyelembe véve a kívánt reprezentációs szempontokat (ti. az egyes hullámformák stabil reprezentációja), és a morfológiai adottságokat is (ti. az egyes szívütések közötti variancia). Az első körben hajtsunk végre egy globális optimalizálást a felvétel összes szívütésére vonatkozóan, melynek során egy páciens-adaptív póluskombinációt határozhatunk meg. Ehhez, a szívütés-osztályozáshoz hasonlóan, tekintsük a páciens szívütéseinek approximációs hibáinak összegéből képzett célfüggvényt. A reprezentáció stabilitásának érdekében az előző pontban ismertetett normalizálással előkészített szívütéseken tekintem a műveletet. A második lépésben végezzünk szívütésenkénti pólusoptimalizálást a páciens-adaptív póluskombináció ismeretében. Ezen lépésben használjuk a páciens-adaptív póluskombinációt mint kezdőpontot, és szűkítsük le a keresési teret a páciens-adaptív inverzpólusok környezetére, a Blaschke-függvényekkel végzett (2.3) transzformáció szerint. Munkám során mindkét lépést a hiperbolikus Nelder–Mead módszerrel végeztem. A kétlépcsős optimalizáció, a QT adatbázison történő kiértékelés alapján, a szívütések stabil és morfológiailag helyes modelljét eredményezi, amely figyelembe veszi az egyes hullámformákra vonatkozó reprezentációs szempontokat, az egyes páciensek szívütéseinek hasonlóságát, de azok varianciáját is.

Az inverzpólusok ismeretében $L^2(\mathbb{T})$ -beli projekcióként, legkisebb négyzetes módszerrel számíthatóak a modellgörbe együtthatói. Megjegyzendő, hogy a modellgörbéhez használt racionális alapfüggvények nem alkotnak ortonormált rendszert. Az együtthatók meghatározása így a biortogonális rendszer alapján, illetve numerikusan, a diszkretizált rendszer mátrixának pszeudoinverzével lehetséges. Ennek számítása viszont az együtthatók alacsony száma miatt egyszerű feladat. A szívütések modellgörbéi, figyelembe véve a modell reprezentációs céljait, közvetlenül eredmé-

nyezik a hullámformák E_k ($k = 1, 2, 3$) modellgörbéit. A 3.8. ábrán a hullámformákra bontás eredményeit szemléltetem az adatbázis két, különböző alakú szívütésére.



3.8. ábra. Szívütések és szegmentált hullámformáik

Adatok forrása: QT Database

3.5.3. Kritikus pontok detektálása

A szakirodalom alapján a hullámformák kritikus pontjai (kezdő-, csúcs-, és végpont) azok geometriai jellemzőihez köthetőek: a kezdő- és végpont az alapvonaltól történő elmozdulást és az oda történő visszatérést, a csúcspont pedig a hullámforma legnagyobb intenzitású pontját hivatott jelölni. A gyakorlatban azonban ezen pontok detektálása problémás lehet a zaj, az alapvonal-vándorlás és a lehetséges morfológiai különbségek miatt. Megemlítendő például az ún. *tangensmódszer*, mellyel a hullám legnagyobb meredekségű pontját keresik meg, és ezen pont érintőegyenese és az alapvonal metszete nyújtja a kezdő- vagy végpont becslését. Munkám során a racionális modellgörbék mint a hullámformák szűrt modelljéből indultam ki, a kritikus pontok származtatását ezen analitikus függvények alapján vizsgáltam. Az előző, 3.2. *A QRS komplexus modellezése* alfejezetben a kritikus pontokat a modellgörbe zérushelyei és szélsőérték helyei alapján származtattuk. Ezen módszerek itt is, részben közvetlen, részben módosított formában alkalmazhatóak, azonban az alapvonal bizonytalansága, és az approximációból adódó hibák miatt más megközelítéseket is vizsgáltam, ezeket tárgyalom a következőkben.

Geometriai megközelítés. Az első megközelítés a fent ismertetett geometriai szempontot követi, vagyis származtassuk a kritikus pontokat a hullámformák mo-

dellgörbéinek zérushelyei és szélsőértékhelyei alapján. Megjegyzendő, hogy szükséges megkülönböztetni a modellgörbe inkább szimmetrikus vagy inkább antiszimmetrikus jellegű viselkedését.

Modellalapú megközelítés. Származtassuk a csúcspontokat a póluszögek alapján. A racionális elemi függvények időben lokalizált viselkedése miatt a görbe csúcspontjai és a póluszög között kapcsolatra számíthatunk, melyet egyes gyakorlati esetek is alátámasztanak.

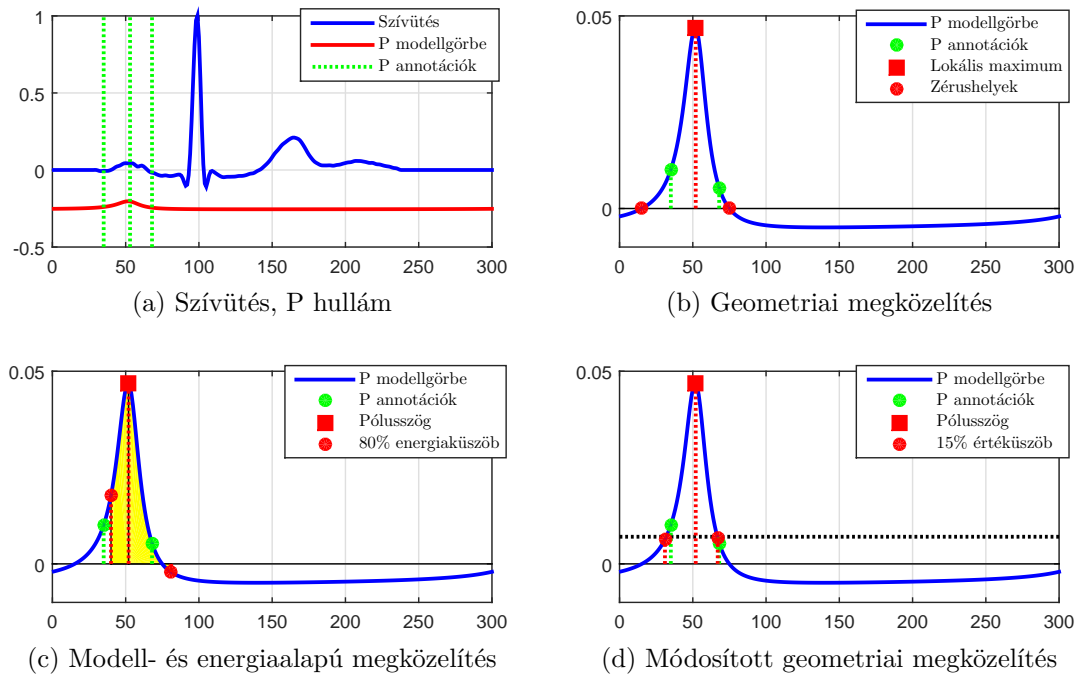
Módosított geometriai megközelítés. A geometriai megközelítés alapvonal miatti bizonytalansága egyes esetekben javítható, a kezdő- és végpont kiválasztásának módosításával. A zérushely keresése helyett keressük egy, az amplitúdótól függő küszöbérték elérését. Pontosabban keressük meg csúcs előtti és utáni első pontot, ahol a modellgörbe abszolútértéke eléri az adott küszöbszintet, a csúcs nagyságához viszonyítva. Legyen $\alpha_k \in \mathbb{D}$ a csúcs helye, $g_k \in [0, 1]$ az adott küszöbszint, és keressük az első $t^* \in (\alpha_k, \pi)$, illetve utolsó $t^* \in [-\pi, \alpha_k)$ időpontot, melyre

$$|E_k(t^*)| \leq g_k \cdot \max \{|E_k(t)| : t \in [-\pi, \pi]\} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Energiaalapú megközelítés. A geometriai megközelítés fenti módosításához hasonlóan egyes esetekben a kezdő- és végpont detektálására nagyobb pontosságot lehet elérni a modellgörbe energiájának küszöbölésével. Legyen ismét $\alpha_k \in \mathbb{D}$ a csúcs helye, $e_k \in [0, 1]$ az adott küszöbszint, és keressük az első $t^* \in (\alpha_k, \pi)$, illetve utolsó $t^* \in [-\pi, \alpha_k)$ időpontot, melyre

$$\left| \int_{\alpha_k}^{t^*} |E_k(t)|^2 dt \right| \leq e_k \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |E_k(t)|^2 dt \quad (k = 1, 2, 3).$$

A továbbiakban a P és T hullám kritikus pontjainak detektálásával foglalkozom, révén a gyakorlatban ezen görbék detektálása az ismertén nehezebb feladat, továbbá a QRS komplexus az előző alfejezetekben tárgyalt módon modellezhető. Ebben a megközelítésben a QRS komplexus modellgörbéje csak approximációs célt szolgál. Az egyes megközelítések egy P hullámra történő alkalmazását a 3.9. ábrán szemléltetem. Megállapítható, hogy a módosított geometriai és energiaalapú megközelítések, azok szabad paramétereinek mellett finomhangolhatóak, akár szívütés-adaptív módon is, amely pontosságuk növelését szolgálhatja. Másrészt megfigyelhető, hogy a különböző megközelítések különböző pontosságú becslését adják a valódi orvosi annotációknak, azokat esetenként mindkét oldalról közelítve. Felmerül tehát a megközelítések kombinációja a kritikus pontok megbízhatóbb becsléséhez. Ez a kombináció több módon, köztük szavazásos és beágyazott tanulási technikák segítségével is megtehető. Ezeket viszont elvettem tekintettel a kevés számú, időben jól lokalizált becslésre, szemben



3.9. ábra. Egy P hullám kritikus pontjainak detektálása

Adatok forrása: QT Database

ezen technikák relatív bonyolultságával. Helyettük tekintsük az egyes megközelítések átlaga és szélsőhelyezetei alapján történő fúziót.

3.6. Eredmények értékelése

A módszertani javaslatomat a QT adatbázison értékeltem ki, a szokásos metrikák alapján. Tekintsük a kritikus pontok és az adatbázis annotációi közötti időeltéréseket, valamint ezek felvételekre vonatkozó átlagát és szórását, és azok felvételek közötti átlagát. Az így kiszámított $\bar{\mu}_e$ átlagos eltérés és $\bar{\sigma}_e$ átlagos szórás mint a detektálás szokásos metrikái adták az alapot az összehasonlításokhoz.

Végző módszerként a fent ismertetett módszertan szerinti előfeldolgozást és modellezést javaslom, majd a P-csúcsot modellalapú, a T-csúcsot geometriai alapú, a kezdő- és végpontokat pedig a módosított geometriai és energiaalapú megközelítések kombinációjával javaslom meghatározni. Utóbbinál a küszöbértékeket empirikus módon határoztam meg az adatbázis alapján.

A javasolt módszer hatékonyságának értékeléséhez tekintsük a szakirodalom korábbi eredményeivel történő összehasonlítást (lásd 3.1. táblázat). Az eredményekből megállapítható, hogy a racionális modell segítségével kiemelt, a szakirodalmi előzményeknél magasabb pontossággal detektálható a P hullám csúcsa, melyet közvetlenül a pólusszögből származtattunk. Általánosságban elmondható, hogy a modell meg-

3.1. táblázat. Szegmentálás kiértékelése és szakirodalmi összehasonlítás

	Javasolt [BogFri19b]		LPD [LagJanCam94]		Wavelet [Mar+04]		Hermite [Kov+17]	
	$\bar{\mu}_e$	$\bar{\sigma}_e$	$\bar{\mu}_e$	$\bar{\sigma}_e$	$\bar{\mu}_e$	$\bar{\sigma}_e$	$\bar{\mu}_e$	$\bar{\sigma}_e$
P _{on}	0.17	34.14	14.02	13.32	2.00	14.80	1.05	14.86
P _{peak}	1.25	14.88	4.78	10.56	3.60	13.20	11.10	14.58
P _{end}	0.09	35.54	-0.12	12.32	1.90	12.80	13.21	15.81
T _{peak}	-9.07	25.49	-7.19	14.28	0.20	13.90	-10.92	12.49
T _{end}	1.08	34.44	13.50	27.00	-1.60	18.10	5.19	16.83

bízhatóan, a korábbi eredményeket meghaladó pontossággal detektálja a P hullámot, és elfogadható mértékben a T hullámot is.

3.7. Összefoglalás

Egy új, adaptív megközelítést javasoltam az EKG hullámformák modellezésére, szegmentálására és rekonstrukciójára. A kritikus pontok detektálására kifejlesztett módszer több szempontból meghaladja a korábbi eljárások hatékonyságát, melyek közül a P-hullám helyének eddigieknél pontosabb meghatározását emelem ki. Az elért eredmények a következők:

1. Kidolgozásra került a QRS komplexus racionális függvényeken alapuló geometriai modellje a kritikus pontok és diagnosztikai mennyiségek származtatásához.
2. Javasoltam rekonstrukciós technikákat, melyek az inverzproblémát, a jel diagnosztikai mennyiségekből történő visszaállítást célozzák meg. Megmutattam a módszerek gyakorlati alkalmazhatóságát. Felvettem a rekonstrukció alkalmazását mint szívütés-szintetizáló módszer, és mint alternatív pólusválasztási stratégia, utóbbit a pólusoptimalizáció helyettesítésére vagy kiegészítésére.
3. Kidolgoztam egy determinisztikus szegmentálási eljárást a szívütések hullámformákra bontására, és a kritikus pontok detektálására. A módszertan részeként adaptív szűrési technikákat javasoltam, és egy, a feladathoz illeszkedő páciens-alapú pólusoptimalizációs módszert fejlesztettem ki.

Az eredményeket a [BogSch18; BogFri19b] cikkekben közöltem. A szegmentálási módszernek közvetlen orvosi alkalmazása lehet a diagnosztikai mennyiségek származtatása révén, a rekonstrukciós módszerek pedig közvetett módon, más módszerek teszteléséhez nyújthatnak segítséget. Tovább lépési lehetőség lehet a kritikus pontok helyzetének finomítása más megközelítések, illetve adaptív küszöbválasztás alapján, valamint más algoritmusok eredményével való kombináció, fúziós és együttes tanulási stratégiákat követve.

4. fejezet

Az inverzpólusok érzékenysége

A fejezetben az adaptív racionális transzformáció pólusainak érzékenységét elemzem. Munkám során az inverzpólusok nagyságának perturbációja és az ez által okozott approximációs hiba közti kapcsolatot vizsgáltam: az approximációs hiba függvényében felső korlátot adtam az inverzpólusok nagyságának megváltoztatására. Ezáltal a megengedhető hiba függvényében tárgyalható az inverzpólus lehetséges perturbációja, amely közvetve vagy közvetlenül alkalmazható lehet a korábbi fejezetekben bemutatott alkalmazások során. Az eredményeket a [BogFri19c] cikk alapján tárgyalom.

4.1. Problémafelvetés és előzmények

Az adaptív racionális transzformáció EKG jelfeldolgozásra történő alkalmazásának kulcsfontosságú kérdése az inverzpólusok megválasztása, melyet, elsősorban optimalizációs megközelítésből, az előző fejezetekben részletesen tárgyaltam. Az egyes szívütések racionális approximációjának hibája közvetlenül vagy közvetve meghatározza a reprezentáció helyességét. Egyrészt jellemzi a modell pontosságát (lásd pl. tömörítés), másrészt befolyásolja a kinyert paraméterek (lásd pl.: együtthatók és kritikus pontok) megbízhatóságát. A pólusoptimalizáció azonban konvergens viselkedés esetén is csak egy közelítést adja az optimális póluskombinációnak, így felmerül a kérdés, hogy hogyan hat az inverzpólusok optimálistól való eltérése az approximációra. A korábbiakban bemutatott módszerek kidolgozása közben azt tapasztaltam, hogy racionális reprezentáció sokkal érzékenyebb a pólusszögekre, mint nagyságokra. A viselkedés megmagyarázható az inverzpólusok és a racionális alap-és elemi függvények alakja közötti kapcsolattal: a pólusszög a görbék időbeli elhelyezkedését, a pólusnagyság pedig azok alakját határozza meg. Az időbeli lokalizáltság miatt így a pólusszögek kismértékű megváltoztatása is jelentős approximációs hibát okozhat, míg a pólusnagyság megváltoztatása, főleg magasabb multiplicitás mellett,

az együtthatók segítségével kompenzálható. Egy másik tapasztalat a pólusoptimalizálás részleges stabilitása. Az EKG szívütések egyazon páciens esetén általában hasonló lefutásúak, de lokális eltéréseket mutatnak. A felvétel egyes szívütésein elvégzett pólusoptimalizáció sok esetben stabilitást mutat a pólusszögre nézve, míg nagyobb varianciát a pólusnagyságra nézve. Hasonló jelenség mutatkozott egy más jellegű szimuláció során is, amikor a pólusoptimalizálást a szívütés zajszintjének változtatása mellett végeztem. Itt a kapott póluskombinációk ismét stabilitást mutatnak a pólusszögekre vonatkozóan. Ezen megfigyelések nyújtották a motivációt a perturbáció matematikai vizsgálatára, melynek során, figyelembe véve a fenti tapasztalatokat, elemi hullámok pólusnagyságának megváltoztatását vizsgáltam. EKG jelfeldolgozási probléma esetén ez annak a kérdéskörnek felel meg, hogy a szívütés hullámformáit approximáló elemi racionális függvények érzékenységét elemezzük, feltéve, hogy az érzékenyebb és könnyebben becsülhető pólusszöget már meghatároztuk, és most a pólusnagyság perturbációját vizsgáljuk.

4.2. Approximációs problémák

A fenti megfontolások alapján a következő approximációs problémákat vezetem be. Mindkét esetben tekintsünk egy racionális modelfüggvényt (alap-, illetve elemi függvényt), melyet approximáljunk egy másik, hasonló rendű, illetve multiplicitású, de eltérő inverzpólusú racionális függvénnyel. Formálisabban, tekintsük racionális függvények speciális $S_1, S_2 \subset \mathfrak{R}_0 \subset L^2(\mathbb{T})$ véges dimenziós altereit, képezzük az $f \in S_1$ elemek S_2 -re vett $g := P_{S_2}f$ projekcióját, és vizsgáljuk az approximációs hibát. A hiba vizsgálatát, kiküszöbölendő az intenzitáskülönbségeket, relatív értelemben, PRD segítségével vizsgálom. Mivel $g \in S_2$ az $f \in S_1$ ortogonális projekciója, így $(f - g)$ és g ortogonálisak, tehát

$$\|f\|_2^2 = \|f - g + g\|_2^2 = \|f - g\|_2^2 + \|g\|_2^2,$$

így PRD a következő alakban írható:

$$PRD^2(f, g) = \frac{\|f - g\|_2^2}{\|f\|_2^2} = \frac{\|f\|_2^2 - \|g\|_2^2}{\|f\|_2^2} = 1 - \frac{\|g\|_2^2}{\|f\|_2^2}.$$

A. Approximációs probléma. *Approximáljunk egy racionális alapfüggvény segítségével modellezett jelet egy ugyanolyan rendű, de eltérő inverzpólusú racionális alapfüggvény segítségével.*

Legyenek $a, b \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ adott, különböző inverzpólusok, $n \in \mathbb{N}^+$ adott rend, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ adott együttható, és tekintsük az

$$f(z) = c \cdot r_a^n(z) \approx g(z) = d \cdot r_b^n(z) \quad (z \in \mathbb{T})$$

approximációt, ahol a $d \in \mathbb{C}$ együtthatót $L^2(\mathbb{T})$ -beli (legkisebb négyzetes) közelítésként kapjuk:

$$\langle f, r_b^n \rangle = \langle g, r_b^n \rangle \implies c \cdot \langle r_a^n, r_b^n \rangle = d \cdot \langle r_b^n, r_b^n \rangle \implies d = c \cdot \frac{\langle r_a^n, r_b^n \rangle}{\langle r_b^n, r_b^n \rangle}.$$

Ekkor a közelítés relatív hibája:

$$PRD_{a,b,n}^2 = 1 - \frac{|d|^2 \cdot \langle r_b^n, r_b^n \rangle}{|c|^2 \cdot \langle r_a^n, r_a^n \rangle} = 1 - \frac{|\langle r_a^n, r_b^n \rangle|^2}{\langle r_a^n, r_a^n \rangle \cdot \langle r_b^n, r_b^n \rangle}.$$

B. Approximációs probléma. *Approximáljunk egy elemi racionális függvény segítségével modellezett jelet egy ugyanolyan multiplicitású, de eltérő inverzpólusú elemi racionális függvény segítségével.*

Legyenek $a, b \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ adott, különböző inverzpólusok, $m \in \mathbb{N}^+$ adott multiplicitás, $c \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ adott együtthatók, és tekintsük az

$$f(z) = \sum_{k=1}^m c_k \cdot r_a^k(z) \approx g(z) = \sum_{k=1}^m d_k \cdot r_b^k(z) \quad (z \in \mathbb{T})$$

approximációt, ahol a $d \in \mathbb{C}^m$ együtthatót $L^2(\mathbb{T})$ -beli (legkisebb négyzetes) közelítésként kapjuk:

$$\langle f, r_b^\ell \rangle = \langle g, r_b^\ell \rangle \implies \sum_{k=1}^m c_k \cdot \langle r_a^k, r_b^\ell \rangle = \sum_{k=1}^m d_k \cdot \langle r_b^k, r_b^\ell \rangle \quad (\ell = 1, 2, \dots, m)$$

$$\implies G(a, b)c = G(b, b)d \implies d = G^{-1}(b, b)G(a, b)c,$$

ahol $G : (\mathbb{D} \setminus \{0\})^2 \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$ az alapfüggvények kétváltozós Gram-mátrixa:

$$[G(a, b)]_{\ell, k} := \langle r_a^k, r_b^\ell \rangle \quad (k, \ell = 1, 2, \dots, m).$$

A Gram-mátrixot itt a szokásostól eltérően két különböző (külön-külön lineárisan független) vektorrendszer között definiálom. Be fogom látni, hogy ez a kétparaméteres mátrix valójában csak az inverzpólusok $\bar{a}b$ szorzatától függ csak, így a vizsgált $a, b \in (0, 1)$ esetben megfeleltethető a $\sqrt{ab} \in (0, 1)$ pólus által generált rendszer Gram-mátrixának, ezért tartom jogosnak az elnevezést. Megjegyzendő továbbá, hogy a kétparaméteres Gram-mátrixok is szimmetrikus, pozitív definiték. A közelítés

relatív hibája pedig:

$$PRD_{a,b,m}^2(c) = 1 - \frac{\langle G(b,b)d, d \rangle}{\langle G(a,a)c, c \rangle} = 1 - \frac{\langle G(a,b)G^{-1}(b,b)G(a,b)c, c \rangle}{\langle G(a,a)c, c \rangle}.$$

4.3. Matematikai összefüggések

Az (A) és (B) approximációs problémák relatív hibáit a racionális alapfüggvények $L^2(\mathbb{T})$ -beli skaláris szorzataival, illetve az azokból képzett Gram-mátrixok segítségével fejeztem ki. A következőkben a skaláris szorzatok alakját, és a Gram-mátrix szerkezetét illető számításokat ismertetek. Bebizonyítom, hogy a skaláris szorzatok közvetlenül kifejezhetők az ${}_2F_1$ Gauss-féle hipergeometrikus függvénnyel:

$${}_2F_1(s, t, u; z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s)_k (t)_k}{(u)_k} \frac{z^k}{k!} \quad (z \in \mathbb{D}; s, t, u \in \mathbb{R}; -u \notin \mathbb{N}), \quad (4.1)$$

ahol $(x)_k$ a (növekvő) Pochhammer-szimbólum:

$$(x)_k = x(x+1) \dots (x+k-1) = k! \cdot \binom{x+k-1}{k} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

valamint előállíthatóak explicit módon egy, az inverzpólusoktól függő racionális törtfüggvény formájában. Megadom továbbá a Gram-mátrixok Cholesky felbontását egy speciális esetben.

Tekintsük először a skaláris szorzatok megadását a hipergeometrikus függvénnyel.

4.1. Állítás. Legyen $a, b \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, $n, m \in \mathbb{N}^+$, ekkor

$$\langle r_a^n, r_b^m \rangle = {}_2F_1(n, m, 1; \bar{a}b).$$

Bizonyítás. Az r_a^n függvények Fourier-sora az egységkörön az

$$\left(\frac{1}{1-z} \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k \quad (|z| < 1)$$

sorfejtés alapján

$$r_a^n(e^{it}) = \left(\frac{1}{1-\bar{a}z} \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \bar{a}^k e^{ikt} \quad (t \in [-\pi, \pi]).$$

Ha $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, akkor a sor minden $z \in \overline{\mathbb{D}}$ esetén abszolút konvergens, így a skaláris szorzat

$$\langle r_a^n, r_b^m \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \binom{m+\ell-1}{\ell} \bar{a}^k b^\ell \langle z^k, z^\ell \rangle$$

alakú. Figyelembe véve a trigonometrikus rendszer

$$\langle z^k, z^\ell \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} e^{-i\ell t} dt = \delta_{k\ell},$$

ortogonalitását,

$$\langle r_a^n, r_b^m \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \binom{m+k-1}{k} (\bar{a}b)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n)_k (m)_k}{(1)_k} \frac{(\bar{a}b)^k}{k!} = {}_2F_1(n, m, 1; \bar{a}b).$$

□

Az állítás következményeként lehetőségünk nyílik a Gram-mátrix értelmezésének átgondolására.

4.1.1. Következmény. *A (B) -ben definiált $G(a, b)$ Gram-mátrix csak a paramétereit $\bar{a}b$ szorzatától függ, így tekinthetjük egyváltozós, $\mathbb{D} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$ típusú függvénynek is, melyet a továbbiakban szintén G -vel fogok jelölni:*

$$[G(a, b)]_{kl} = {}_2F_1(k, l, 1; \bar{a}b) \implies G(a, b) =: G(\bar{a}b) \quad (a, b \in \mathbb{D} \setminus \{0\}).$$

A skaláris szorzatok explicit alakjának megadásához tekintsük az $n, m, 1 \in \mathbb{N}^+$ paraméterű hipergeometrikus függvényeket.

4.2. Állítás. *Legyen $n, m \in \mathbb{N}^+$, ekkor*

$${}_2F_1(n, m, 1; z) = \frac{P(z)}{(1-z)^{n+m-1}} \quad (z \in \mathbb{D}),$$

ahol P egy $\min\{n-1, m-1\}$ fokú polinom. Speciálisan,

$${}_2F_1(n, n, 1; z) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}^2 z^k}{(1-z)^{2n-1}} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Bizonyítás. Tekintsük a hipergeometrikus függvények

$${}_2F_1(n, m, 1; z) = (1-z)^{1-n-m} {}_2F_1(1-n, 1-m, 1, z) \quad (z \in \mathbb{D})$$

Euler-transzformációját. A transzformált alakban $(1 - n)$ és $(1 - m)$ nempozitív egész számok, mely esetben ${}_2F_1$ felírható z -től függő, $\min\{n - 1, m - 1\}$ fokú polinomként. Az $n = m$ speciális alak egyszerű számolással ellenőrizhető. \square

Az állítást a 4.1. állítással egybevetve megkapjuk a skaláris szorzatok $\bar{a}b$ szorzattól függő explicit alakját, racionális függvények segítségével. Az állításban csak az $n = m$ speciális esetet fejeztem ki explicit módon, de a többi eset is könnyen megadható.

A skaláris szorzatok fenti racionális törtfüggvény alakjában történő megadásához más úton is eljuthatunk, kihasználva a racionális rendszer diszkretizálhatóságát (lásd [FriSch11]). Két adott rendű inverzpólus esetén a $[-\pi, \pi)$ intervallum diszkrét mintavételezési pontjai explicit módon megadhatók a Blaschke-függvények segítségével, így a skaláris szorzat is explicit számolható. A számítás eredménye megegyezik a 4.2. állításban megfogalmazottal, de a gondolatmenet elméleti szempontból jelentős a Gram-mátrix kezeléséhez, ugyanis a skaláris szorzatok szempontjából a racionális függvények közvetlenül kezelhetőek a diszkrét mintavételezési pontokon kiértékelt véges vektorokként.

Tekintsük most a 4.1.1. következményben definiált egyváltozós Gram-mátrix Cholesky-felbontását egy speciális esetben: ha az argumentuma valós szám. Ez a kétváltozós Gram-mátrix tekintetében annak felel meg, hogy a két inverzpólus szöge megegyezik.

4.3. Állítás. Legyen $x \in (0, 1)$ és $m \in \mathbb{N}^+$. Ekkor a $G(x) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ Gram-mátrix Cholesky-felbontása

$$G(x) = L(x)L^T(x), \quad L^T(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} D(\sqrt{x}) P D\left(\frac{1}{1-x}\right),$$

alakú, ahol $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ paraméteres diagonális mátrix:

$$D(x) = \text{diag}(1, x, x^2, \dots, x^{m-1}) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ pedig a felső Pascal-mátrix:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & m-1 \\ & & 1 & 3 & 6 & \cdots & \binom{m-1}{2} \\ & & & 1 & 4 & \cdots & \binom{m-1}{3} \\ & & & & 1 & \cdots & \binom{m-1}{4} \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás. Legyen $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, és tekintsük az $\{r_a^k : k = 1, \dots, m\}$ rendszert, azaz az $\mathbf{a} = (a, a, \dots, a) \in \mathbb{D}^m$ véges sorozat által generált MT-rendszert (avagy Laguerre-rendszert):

$$\Phi_k^{\mathbf{a}}(z) = \frac{\sqrt{1 - |a|^2}}{1 - \bar{a}z} B_a^k(z) \quad (z \in \mathbb{T}; k = 0, 1, \dots, m-1),$$

Az r_a racionális alapfüggvény és a B_a Blaschke-függvény között fennálló

$$B_a = \frac{(1 - |a|^2)r_a - 1}{\bar{a}},$$

kapcsolat alapján $\Phi_k^{\mathbf{a}}$ kifejezhető r_a segítségével:

$$\Phi_k^{\mathbf{a}} = \sqrt{1 - |a|^2} r_a B_a^k = \frac{(-1)^k \sqrt{1 - |a|^2}}{\bar{a}^k} \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} (1 - |a|^2)^\ell (-1)^\ell r_a^{\ell+1}.$$

Mátrixalakban felírva:

$$[\Phi_0^{\mathbf{a}} \ \Phi_1^{\mathbf{a}} \ \dots \ \Phi_{m-1}^{\mathbf{a}}] = [r_a \ r_a^2 \ \dots \ r_a^m] \cdot U,$$

ahol

$$U = \sqrt{1 - |a|^2} D(1 - |a|^2) E P E D \left(\frac{1}{\bar{a}} \right), \quad E = D(-1).$$

Az MT-rendszer ortogonalitása alapján:

$$I = U^* G(a, a) U \implies G(a, a) = (U^*)^{-1} U^{-1}.$$

Felhasználva, hogy a Pascal-mátrix inverzére $P^{-1} = E P E$:

$$U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1 - |a|^2}} D(\bar{a}) P D \left(\frac{1}{1 - |a|^2} \right).$$

Végül vonjuk össze az U^{-1} -ben szereplő $D(\bar{a})$, és az $(U^*)^{-1} = (U^{-1})^*$ -ben szereplő $(D(\bar{a}))^* = D(a)$ tagokat: $D(a)D(\bar{a}) = D^2(|a|)$. Így $G(a, a) = G(|a|^2)$ Cholesky felbontása:

$$L^T(|a|^2) = \frac{1}{\sqrt{1 - |a|^2}} D(|a|) P D \left(\frac{1}{1 - |a|^2} \right),$$

ahol könnyen ellenőrizhető, hogy $L^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ egy felső háromszögmátrix pozitív diagonális elemekkel, vagyis tényleg egy Cholesky-felbontást kaptunk. A tényleges állítást az $x = |a|^2$ helyettesítéssel kapjuk. \square

4.3.1. Következmény. Ha $a, b \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ pólusszöge megegyezik (speciálisan $a = b$), akkor a $G(a, b) = G(\bar{a}b) = G(|ab|)$ Gram-mátrix Cholesky-felbontása:

$$G(|ab|) = L(|ab|)L^T(|ab|), \quad L^T(|ab|) = \frac{1}{\sqrt{1-|ab|}}D(\sqrt{|ab|})PD\left(\frac{1}{1-|ab|}\right).$$

4.4. Eredmények értékelése

A megelőző számítások után a következőkben az inverzpólusok perturbációja és az approximációs hiba között feltárt kapcsolatot ismertetem. A problémafelvetésben ismertetett módon vizsgálataimat a pólusnagyság megváltoztatására szűkítettem le, azaz tegyük fel, hogy az $a, b \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ inverzpólusok szöge megegyezik, és a nagyságukban van eltérés. A 4.1. állítás alapján a skaláris szorzatok és a Gram-mátrix csak az $\bar{a}b$ szorzattól függenek, így feltehető, hogy a közös pólusszög 0, azaz a és b valós számok, melyekre $a, b \in (0, 1)$. A gyakorlati motivációk alapján azonban a pólusnagyság további leszűkítéseit is érdemes megfontolni. Az EKG alkalmazások tapasztalatai alapján ugyanis az EKG hullámformák modellezésére sem a pólusnagyságok túl kicsire, sem túl nagyra választása nem alkalmas. Előbbi esetben ugyanis a racionális alap- és elemi függvények túl „szélessé”, utóbbi esetben túl „keskennyé” válnak (pontosabban az effektív tartójuk túlságosan megnő, illetve leszűkül), ami nem illeszkedik a hullámformák általános alakjához. Másrészt, ha a pólusnagyság tart 0-hoz, akkor a rendszer a trigonometrikus rendszerhez közelít, elveszítve a racionális rendszer nyújtotta speciális lehetőségeket. 1 közelében pedig numerikus instabilitás lép fel a diszkretizálás miatt. Mindezeket, és az előző fejezetek tapasztalatait figyelembe véve indokolt az inverzpólusok $[0.5, 1)$ intervallumra leszűkített értékét vizsgálni.

A következőkben egy-egy becslést adok az (A) és (B) approximációs problémák esetén, melyek felső korlátok a pólusnagyság lehetséges megváltoztatására, a megengedhető approximációs hiba függvényében.

4.4. Állítás. Legyen $a \in [0.5, 1)$, $h \in (0, a)$, $b = a - h \in (0, 1)$, $n \in \mathbb{N}^+$, és tekintsük az (A) approximációs problémát. Ekkor adott $0 < \varepsilon < 1$ esetén $PRD_{a,b,n} < \varepsilon$ teljesüléséhez elégséges a következő:

$$h < \frac{1 - a^2}{\sqrt{4(n-1)^2(1-a^2)^2 + (2n-1)}}\varepsilon.$$

Bizonyítás. A 4.1. állítás alapján, figyelembe véve, hogy a, b valós számok:

$$PRD_{a,b,n}^2 = 1 - \frac{\langle r_a^n, r_b^n \rangle^2}{\langle r_a^n, r_a^n \rangle \cdot \langle r_b^n, r_b^n \rangle} = 1 - \frac{{}_2F_1(n, n, 1; ab)^2}{{}_2F_1(n, n, 1; a^2) \cdot {}_2F_1(n, n, 1; b^2)} =$$

[felhasználva a 4.2. állítást]

$$= 1 - \frac{\left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (ab)^k \right)^2}{\left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{2k} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} b^{2k} \right)} \cdot \left(\frac{(1-a^2)(1-b^2)}{(1-ab)^2} \right)^{2n-1}.$$

Az első tagban jelölje Z a számlálót, és W a nevezőt:

$$\begin{aligned} Z &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\binom{n-1}{k}}_{=: \alpha_k} (ab)^k \right)^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_k \alpha_j a^{k+j} b^{k+j} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^2 a^{2k} b^{2k} + 2 \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{j=k+1}^{n-1} \alpha_k \alpha_j a^{k+j} b^{k+j}, \\ W &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k a^{2k} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k b^{2k} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_k \alpha_j a^{2k} b^{2j} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^2 a^{2k} b^{2k} + \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{j=k+1}^{n-1} \alpha_k \alpha_j (a^{2k} b^{2j} + a^{2j} b^{2k}). \end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} W - Z &= \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{j=k+1}^{n-1} \alpha_k \alpha_j (a^{2k} b^{2j} - 2a^{k+j} b^{k+j} + a^{2j} b^{2k}) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{j=k+1}^{n-1} \alpha_k \alpha_j (a^j b^k - a^k b^j)^2 = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{j=k+1}^{n-1} \alpha_k \alpha_j a^{2k} b^{2k} (a^{j-k} - b^{j-k})^2 \leq \end{aligned}$$

[felhasználva az $a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1}) \leq h \cdot m \cdot a^{m-1} \leq 2 \cdot h \cdot m \cdot a^m$ becslést, $m := j - k$ helyettesítéssel]

$$\begin{aligned} &\leq 4h^2 \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{j=k+1}^{n-1} \alpha_k \alpha_j a^{2k} b^{2k} (j-k)^2 a^{2(j-k)} \leq \\ &\leq 4h^2 (n-1)^2 \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{j=k+1}^{n-1} \alpha_k \alpha_j a^{2j} b^{2k} \leq h^2 (n-1)^2 W, \end{aligned}$$

vagyis

$$\frac{Z}{W} = \frac{W - (W - Z)}{W} \geq 1 - 4(n-1)^2 h^2.$$

Hasonlóan becsülhető a második tag is:

$$\left(\frac{(1-a^2)(1-b^2)}{(1-ab)^2} \right)^{2n-1} = \left(1 - \frac{(a-b)^2}{(1-ab)^2} \right)^{2n-1} \geq$$

[a Bernoulli-egyenlőtlenség alapján, $-(a-b)^2/(1-ab)^2 \geq -1$ mellett]

$$\geq 1 - (2n-1) \frac{(a-b)^2}{(1-ab)^2} \geq 1 - \frac{(2n-1)}{(1-a^2)^2} h^2.$$

Ekkor, ha h elég kicsi:

$$\begin{aligned} PRD_{a,b,n}^2 &\leq 1 - (1 - 4(n-1)^2 h^2) \left(1 - \frac{(2n-1)}{(1-a^2)^2} h^2 \right) = \\ &= \left(4(n-1)^2 + \frac{(2n-1)}{(1-a^2)^2} \right) h^2 - 4(n-1)^2 \frac{(2n-1)}{(1-a^2)^2} h^4 \leq \\ &\leq \left(4(n-1)^2 + \frac{(2n-1)}{(1-a^2)^2} \right) h^2, \end{aligned}$$

vagyis a $PRD_{a,b,n} < \varepsilon$ elégséges feltétele:

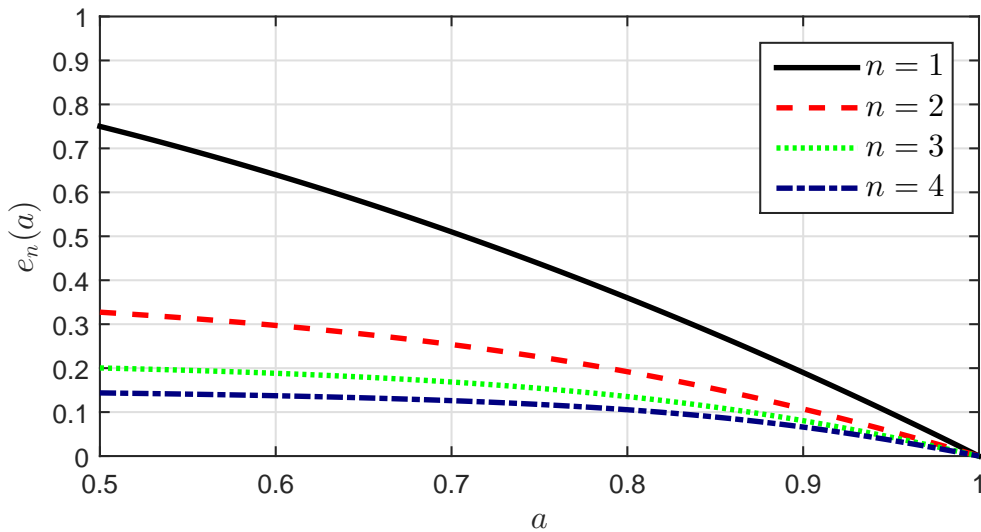
$$h < \frac{\varepsilon}{\sqrt{4(n-1)^2 + \frac{(2n-1)}{(1-a^2)^2}}} = \frac{1-a^2}{\sqrt{4(n-1)^2(1-a^2)^2 + (2n-1)}} \varepsilon.$$

□

A 4.1. ábra a tolerálható eltérést szemlélteti, azaz a perturbáció felső korlátjának a megengedhető hibaszinttől való

$$e_n(a) := \frac{1-a^2}{\sqrt{4(n-1)^2(1-a^2)^2 + (2n-1)}}, \quad h < e_n(a)\varepsilon$$

függését.



4.1. ábra. A tolerálható eltérés a pólusnagyságának függvényében

4.5. Állítás. Legyen $a \in [0.5, 1)$, $h \in (0, a)$, $b = a - h \in (0, 1)$, $m \in \mathbb{N}^+$, és tekintsük a (B) approximációs problémát. Ekkor adott $0 < \varepsilon < 1$ esetén $PRD_{a,b,m} < \varepsilon$ teljesüléséhez elégséges a következő:

$$h < \frac{1 - a^2}{\sqrt{3m^2 - 5m + 3}} \varepsilon.$$

Bizonyítás. A 4.4. állításhoz hasonlóan keressük a PRD becslését

$$PRD_{a,b,m}^2 < g(a)h^2 \leq \varepsilon^2$$

alakban, ahol $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^+$ alkalmas függvény. A feltétel akkor teljesül $c \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ esetén, ha:

$$\begin{aligned} PRD_{a,b,m}^2(c) < g(a)h^2 &\iff 1 - PRD_{a,b,m}^2(c) > 1 - g(a)h^2 \iff \\ &\iff \frac{\langle G(ab)G^{-1}(b^2)G(ab)c, c \rangle}{\langle G(a^2)c, c \rangle} > 1 - g(a)h^2 \iff \end{aligned}$$

[felhasználva, hogy $G(a^2)$ pozitív definit, és feltételezve, hogy $1 - g(a)h^2 > 0$]

$$\iff \langle (G(ab)G^{-1}(b^2)G(ab) - (1 - g(a)h^2)G(a^2))c, c \rangle > 0.$$

Legyen $c = L^{-T}(a^2)\gamma$ alakú alkalmas $\gamma \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ mellett, ahol $L^T(a^2)$ a $G(a^2)$ mátrix Cholesky-felbontása, a 4.3. állítás szerint. Ekkor az állítás γ -val kifejezve:

$$\langle (L^{-1}(a^2)G(ab)G^{-1}(b^2)G(ab)L^{-T}(a^2) - (1 - g(a)h^2)I) \gamma, \gamma \rangle > 0$$

A kvadratikus alak akkor és csak akkor pozitív minden $c \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$, illetve minden $\gamma \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$, ha az azt generáló (szimmetrikus) mátrix pozitív definit, azaz

$$\lambda_{\min} (L^{-1}(a^2)G(ab)G^{-1}(b^2)G(ab)L^{-T}(a^2) - (1 - g(a)h^2)I) > 0 \iff$$

$$\lambda_{\min} (L^{-1}(a^2)G(ab)G^{-1}(b^2)G(ab)L^{-T}(a^2)) > 1 - g(a)h^2,$$

ahol λ_{\min} a legkisebb sajátértéket jelöli. A baloldalon szereplő mátrix felírható AA^T alakban, ahol

$$A = L^{-1}(a^2)G(ab)L^{-T}(b^2).$$

Ekkor a sajátértékekre vonatkozó feltétel megfogalmazható A szinguláris értékeivel:

$$\lambda_{\min} (AA^T) = \sigma_{\min}^2(A) = \frac{1}{\sigma_{\max}^2(A^{-1})} > 1 - g(a)h^2.$$

Fejezzük ki A^{-1} -et a Cholesky-felbontások segítségével, a 4.3. bizonyításában szereplő összefüggések alapján:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= L^T(b^2)G^{-1}(ab)L(a^2) = L^T(b^2)L^{-T}(ab)L^{-1}(ab)L(a^2) = \\ &= \frac{1-ab}{\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}} D(b)PD \left(\frac{1-ab}{1-b^2} \right) EPD \left(\frac{1}{ab} \right) P^T ED \left(\frac{1-ab}{1-a^2} \right) P^T D(a). \end{aligned}$$

A kifejezés egyszerűsítéséhez vegyük észre, hogy az $EPD(x)EP$ ($x \in (0, 1)$) mátrix elemei a következőképpen fejezhetőek ki:

$$[EPD(x)EP]_{ij} = \binom{j}{i} x^i (1-x)^{j-i} \quad (i \leq j).$$

Speciálisan, az $x = (1-ab)/(1-b^2)$ helyettesítéssel:

$$\left[EPD \left(\frac{1-ab}{1-b^2} \right) EP \right]_{ij} = \binom{j}{i} \frac{(1-ab)^i (a-b)^{(j-i)} b^{j-i}}{(1-b^2)^j} \quad (i \leq j),$$

és

$$\left[ED(b)PD \left(\frac{1-ab}{1-b^2} \right) EPD \left(\frac{1}{b} \right) \right]_{ij} = \binom{j}{i} \frac{(1-ab)^i (a-b)^{(j-i)}}{(1-b^2)^j} \quad (i \leq j),$$

így

$$ED(b)PD \left(\frac{1-ab}{1-b^2} \right) EPD \left(\frac{1}{b} \right) = D \left(\frac{1-ab}{a-b} \right) PD \left(\frac{a-b}{1-b^2} \right).$$

Hasonlóan

$$ED \left(\frac{1}{a} \right) P^T D \left(\frac{1-ab}{1-a^2} \right) EP^T D(a) = D \left(\frac{a-b}{1-a^2} \right) P^T D \left(\frac{1-ab}{a-b} \right).$$

Tehát A^{-1} a következő alakban írható:

$$A^{-1} = \frac{1-ab}{\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}} ED \left(\frac{1-ab}{a-b} \right) PD \left(\frac{(1-a^2)(1-b^2)}{(a-b)^2} \right) EP^T D \left(\frac{1-ab}{a-b} \right).$$

Legyen

$$t = \frac{a-b}{\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}, \quad u = \frac{1-ab}{\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}},$$

akkor egyrészt $1+t^2 = u^2$, és

$$A^{-1} = u \underbrace{ED(u)}_{=:B} D \left(\frac{1}{t} \right) PD(t) E \underbrace{D(t)P^T D \left(\frac{1}{t} \right)}_{=:B^T} D(u) = u^2 ED(u)BEB^T D(u).$$

A^{-1} legnagyobb szinguláris értékére:

$$\sigma_{\max}(A^{-1}) = \|A^{-1}\|_2 \leq u \|D(u)\|_2^2 \|BEB^T\|_2 = u^{2m-1} \|BEB^T\|_2 \leq$$

[felhasználva a $2\sigma_{\max}(XY^T) \leq \sigma_{\max}(X^T X + Y^T Y)$ becslést $X = BE$ és $Y = B$ helyettesítéssel, valamint kihasználva, hogy $\|M\| \leq \sqrt{\|M\|_1 \cdot \|M\|_\infty} = \|M\|_\infty$ ($M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ szimmetrikus)]

$$\leq u^{2m-1} \left\| \frac{EB^T BE + B^T B}{2} \right\|_2 \leq u^{2m-1} \left\| \frac{EB^T BE + B^T B}{2} \right\|_\infty.$$

Könnyű megmondolni, hogy az $M \mapsto EME$ transzformáció az $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ mátrix elemeit sakktáblaszerűen módosítja, a sakktábla páratlan indexű helyein megváltoztatja az előjelet. Ennek megfelelően az $M \mapsto (EME + M)/2$ transzformáció a sakktábla páratlan indexű helyein törli a mátrix elemeket. Tekintsük most a B , $B^T B$ és $EB^T BE + B^T B$ mátrixok szerkezetét. B pozitív felső háromszögmátrix, továbbá szerkezete hasonló a P Pascal-mátrixéhoz, mellékátlói t ugyanazon hatványait tartalmazzák. Precízebben a mátrix felírható

$$B = e^{tQ}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & m-1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixexponenciális alakban. A $B^T B$ mátrix pozitív, és a sakktábla szerint páros elemei így csak t páros kitevőjű hatványainak lineáris kombinációit tartalmazzák. Végtelen normája a nemnegativitás miatt közvetlenül sorösszegeknek a maximuma. Könnyű ellenőrizni, hogy a maximumot az utolsó sorban éri el, továbbá ott indukcióval igazolható a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{EB^T BE + B^T B}{2} \right\|_\infty &< 1 + \left(\frac{3m^2 - 7m + 4}{2} \right) t^2 + \left(\frac{3m^2 - 7m + 4}{2} \right)^2 t^4 + \dots \leq \\ &\leq \frac{1}{1 - \frac{3m^2 - 7m + 4}{2} t^2} \end{aligned}$$

becslés (kellően kicsi t esetén), melyet a sorösszeg első tagjának kiszámításával nyertem. Tehát

$$\sigma_{\max}^2(A^{-1}) < \frac{u^{2(2m-1)}}{\left(1 - \frac{3m^2 - 7m + 4}{2} t^2\right)^2} = \frac{(1 + t^2)^{2m-1}}{\left(1 - \frac{3m^2 - 7m + 4}{2} t^2\right)^2} <$$

$$< \frac{1}{(1-t^2)^{2m-1} \left(1 - \frac{3m^2-7m+4}{2}t^2\right)^2},$$

és

$$\sigma_{min}^2(A) = \frac{1}{\sigma_{max}^2(A^{-1})} > (1-t^2)^{2m-1} \left(1 - \frac{3m^2-7m+4}{2}t^2\right)^2 \geq$$

[felhasználva a Bernoulli-egyenlőtlenséget]

$$\geq (1-(2m-1)t^2)(1-(3m^2-7m+4)t^2) > 1-(3m^2-5m+3)t^2 \geq$$

$$\geq 1 - \frac{3m^2-5m+3}{(1-a^2)^2}h^2.$$

Tehát $PRD_{a,b,m} < \varepsilon$ elégséges feltétele:

$$h < \frac{1-a^2}{\sqrt{3m^2-5m+3}}\varepsilon.$$

□

4.5. Összefoglalás

A racionális rendszerekkel történő approximáció problémakörét vizsgálva alkalmas felső korlátot adtam a pólusnagyság perturbációjára a megengedhető approximációs hiba függvényében. Fontos részeredmények a racionális függvények skaláris szorzataira felírt összefüggések, és a racionális Gram-mátrix Cholesky-felbontásának meghatározása.

Az eredményeket a [BogFri19c] cikkben közöltem. Az eredmények közvetlenül alkalmazhatóak az EKG jelfeldolgozási gyakorlatban, például az inverzpólusok kvantálására, és a pólusoptimalizálás vezérlésére. További kutatási lehetőség a becslés élességének vizsgálata, szükséges feltételek keresése, kiterjesztés a pólusszög perturbációjára, különböző dimenziójú elemi függvények vizsgálata, valamint több elemi függvény kompozíciójaként előálló komplex modellek elemzése.

5. fejezet

CT képminőségmérés

A fejezetben tüdő CT felvételek képminőségének mérését, és az ennek kiértékelésére kidolgozott szimulációs környezetet ismertetem. Egy referenciakép nélküli képminőségmérő metrikát dolgoztam ki alacsony dózisu felvételek képminőségének objektív mérésére, valamint egy matematikai fantommodellt és zajmodellezésen alapuló CT szintetizálási módszert fejlesztettem az algoritmusok tesztelése céljából. Az eredményeket a [Bog15; Bog16] cikkek alapján ismertetem.

5.1. CT feldolgozás

A komputertomográfiás (CT) képalkotás (lásd [KakSla01]) napjaink egyik legelterjedtebb háromdimenziós képalkotási technológiája. Elsősorban az orvosi alkalmazás szempontjából jelentős, de más mérnöki, például anyagtudományi és gyártástechnológiai alkalmazása is ismert (lásd pl. [PleRouGue16]). Az orvosi alkalmazások közül a legjelentősebbek a diagnosztikai célú felhasználás (elsősorban daganatos megbetegedések esetén), a traumák vizsgálata, illetve a műtéti beavatkozások segítése. A CT a páciens szervezetének belső felépítéséről alkot 3D felvételt kívülről, feltáró műtéti beavatkozás nélkül. Az eljárás ugyanakkor invazív, ionizáló sugárzásnak teszi ki a páciens, melynek szövetkárosító, rákkeltő hatása lehet. Éppen ezért csak orvosilag kellően indokolt esetekben kerül alkalmazásra, mérnöki és informatikai szempontból pedig fontos célkitűzés a sugárdózis csökkentése, a képminőség megtartása mellett.

5.1.1. Fizikai és technikai háttér

A CT képalkotás alapját a röntgenfelvételek adják. A röntgensugarak tárgyakon (így az emberi testen is) áthaladva kölcsönhatásba lépnek annak anyagával, melynek hatására szóródnak és elnyelődnek. A ténylegesen fellépő kölcsönhatások

jellege függ a felvételezéshez használt röntgenfotonok energiájától. A CT felvételek esetén többnyire Compton- és Rayleigh-szórás, valamint fotoeffektus jelentkezik. A kölcsönhatások során fellépő elnyelődés mértéke anyagtípusonként (így humán szövettípusonként is) változó mértékű lehet, így az elnyelődés mérése alapján következtetéseket vonhatunk le az objektumról. A hagyományos röntgenfelvételek esetén a képet egyetlen röntgenforrásból indított sugarakkal állítjuk elő, melyek áthaladnak a vizsgált objektumon, és rögzítésre kerülnek a röntgenforrással szemben elhelyezett detektorokon, ami az objektum egy 2D vetületét eredményezi. A CT felvételezés során az objektumot több irányból indított röntgensugarak segítségével tapogatjuk le, melyből aztán egy 3D kép rekonstruálható az objektum belső felépítéséről.

Az elnyelődés statisztikai mértéke a *Beer–Lambert-törvény* segítségével írható le, melyet [Dea83] alapján tárgyalok. Egyetlen röntgensugarat vizsgálva, jelölje $I_0 \in \mathbb{R}^+$ a sugár kezdeti intenzitását (a röntgenfotonok idő- és területi egységre eső számát), $I \in \mathbb{R}^+$ pedig a sugár detektorokon rögzített intenzitását, miután áthaladt a vizsgált objektumon. Az intenzitásváltozás homogén összetételű objektum esetén annak $\mu \in \mathbb{R}_0^+$ ún. *lineáris elnyelési*, avagy *gyengítési együtthatója* segítségével jellemezhető:

$$I = I_0 e^{-\mu x},$$

ahol $x \in \mathbb{R}^+$ a röntgensugár objektumban megtett útja. Inhomogén objektum esetén az objektum anyagának lokális gyengítési együtthatói egy korlátos tartójú, integrálható, $\mu : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ függvénnyel modellezhető, és az intenzitásváltozás az

$$I = I_0 e^{-\int_L \mu},$$

módon jellemezhető, ahol $L \subset \mathbb{R}^3$ a röntgensugár anyagban megtett útját leíró egyenes, $\int_L \mu$ pedig az L egyenes mentén vett integrál, melyet *projekciónak* is nevezünk. A lehetséges egyenesek menti projekciók adják μ ún. *profilját*:

$$\mathcal{R}\mu(L) := -\ln \frac{I}{I_0} = \int_L \mu \quad (\mu : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_0^+; L \subset \mathbb{R}^3 \text{ egyenes}),$$

amely megfeleltethető a μ függvény (térbeli) *Radon-transzformáltjának*. A CT felvételezés során egyes, a vizsgált objektumot lehető legnagyobb mértékben lefedő egyenesek mint sugárirányok mentén készülnek projekciók. Ezek összessége a *szinogram*, amely így a profil egy diszkretizációjának tekinthető. Matematikai és fizikai szempontból tehát a CT képalkotás az objektum μ lineáris gyengítési együtthatóinak mérésére szolgál, de nem közvetlenül, hanem a Radon-transzformációval kapcsolatba hozható szinogramon keresztül. A μ együtthatók rekonstruálása a Radon-transzformáció invertálásával, *visszavetítési* eljárásokkal lehetséges (lásd 1.6. *Radon-transzformáció*). A lineáris gyengítési együtthatók függnek a felvételezés során alkalmazott röntgensugarak energiájától, ennek kiküszöbölésére a tényleges CT képen

azok normalizált változatát használják, az ún. *Hounsfield Unit* (HU) értéket:

$$HU := 1000 \cdot \frac{\mu - \mu_{H_2O}}{\mu_{H_2O}}.$$

A normalizálás alapja a víz adott energia mellett mért μ_{H_2O} gyengítési együtthatója, így a homogén víz HU értéke 0. Speciálisan, a levegő gyengítési együtthatója 0-nak, így HU értéke -1000 -nek tekinthető, valamint hogy az emberi test HU tartománya általában -1000 (levegő) és 3000 (sűrű csont) közötti.

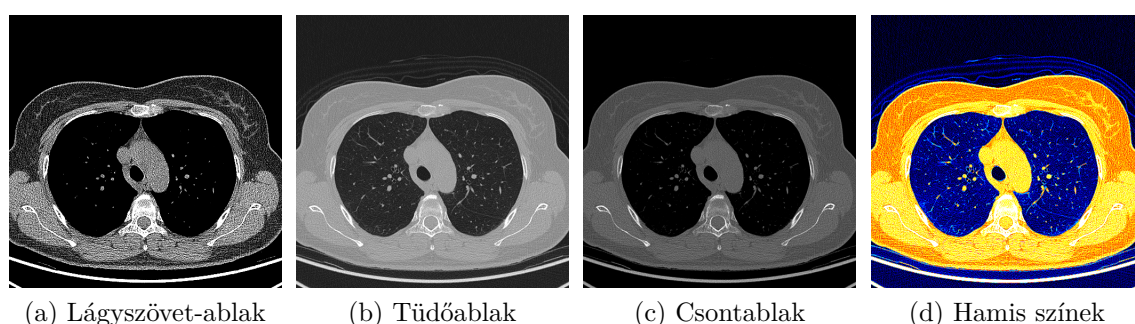
5.1.2. CT képek interpretálása

A fenti modellek alapján beszélhetünk nyers, és rekonstruált CT felvételekről. A nyers CT felvétel adott egyenesek mentén vett projekciók összessége, amely CT eszközönként, illetve felvételezési módonként különböző lehet. A rekonstruált CT képek formátuma azonban jellemzően egységes, a vizsgált objektum téglatest alakú környezetében, egy $n \times m \times k$ ($n, m, k \in \mathbb{N}^+$) méretű térrács mentén mintavételezett 3D kép. Ennek interpretációja általában *szeletek* mentén történik. Egy kitüntetett irány mentén a 3D képünket 2D szeletekre bontjuk, amelyeket mint 2D képeket interpretálunk. Orvosi CT felvételek esetén ezek, illeszkedve a CT eszköz vertikális irányú mozgásához, általában axiális szeleteket jelentenek. A gyakorlatban a szeletek általában négyzetesek, kettőhatvány (128×128 , 256×256 vagy 512×512) felbontásúak, a számuk pedig változó.

A rekonstruált CT kép *voxel*eit, illetve az egyes szeletek *pixel*eit a fenti HU értékek alkotják, tehát a felvételek szürkeárnyaltos képeknek tekinthetők. Mivel a hagyományos monitorok csak 256 szürkeárnyalat megjelenítésére alkalmasak, és a CT képek jellemzően ennél több szürkeárnyalatot tartalmaznak (orvosi alkalmazás esetén jellemzően -1000 és 3000 közötti egész értékeket), így a vizuális interpretációhoz a képek valamilyen transzformációja szükséges. A két leggyakoribb megközelítés az ablakozás és a hamis színes megjelenítés, illetve ezek kombinációja. Az ablakozásnál az intenzitások egy adott tartománya kerül leképezésre a $[0, 255]$ intervallumra, tartomány el nem érő intenzitású pixelek 0 (fekete), míg a meghaladó intenzitású pixelek értéke 255 (fehér). Az ablakokat a szakirodalomban középértékkel ($L \in \mathbb{Z}$) és ablakszélességgel ($W \in \mathbb{Z}$) szokás megadni, a transzformációs függvény ekkor:

$$T_{W,L}(x) := \begin{cases} 0, & x < L - W/2, \\ \left\lfloor 256 \cdot \frac{x - (L - W/2)}{W} \right\rfloor, & L - W/2 \leq x < L + W/2, \\ 255, & x \geq L + W/2, \end{cases}$$

ahol $x \in \mathbb{Z}$ a bemeneti voxel HU intenzitása. Megfelelően megválasztott ablakok segítségével kiemelhetőek a vizsgálni kívánt szövettípusok tulajdonságai, azonban megjegyzendő, hogy különböző források eltérő ablakmérettel dolgoznak. A másik megközelítés szerint a vizsgálandó ablak szürkeárnyalatait egy hamis színskála segítségével jelenítjük meg, amely a színek révén lehetővé teszi 256-nál több szürkeárnyalat megjelenítését. Az 5.1. ábrán egy tüdő CT szelet látható lágyszövet-ablak ($L = 50, W = 350, [-125, 225]$ tartomány), tüdőablak ($L = -200, W = 2000, [-1200, 800]$ tartomány), és csontablak ($L = 300, W = 2000, [-700, 1300]$ tartomány), valamint hamis színes megjelenítéssel. Dolgozatomban a hamis színes megjelenítést fogom preferálni, mivel ez ötvözi az egyes ablakok előnyeit.



5.1. ábra. Tüdő CT szelet különböző megjelenítésekkel

Adatok forrása: Pozitron Diagnosztika Központ

5.1.3. CT működés, generációk

Az CT eszköz működésének alapja a vizsgált objektum röntgensugarakkal, a lehető legtöbb irányból történő pásztázása. Az eszközök általános alakja egy jellemzően függőleges gyűrű vagy keret, melyben röntgenforrás(ok) és azzal szemben elhelyezett detektor(ok) található(k), ezen gyűrű közepén helyezkedik el a vizsgálandó objektum. A felvételezés során a forrás és a detektorok körbefordulhatnak, esetenként oldalirányú mozgást végezhetnek, illetve az egész rendszer mozoghat keret síkjára merőleges irányban. Utóbbi mozgási forma helyettesíthető a vizsgált objektum ez irányú mozgásával, amely jellemzően könnyebben kivitelezhető feladat. Humán felvételezés során a páciens jellemzően egy ágyon helyezkedik el a keret belsejében, így a keret egy axiális sík mentén foglal helyet, ezen síkban végez eltolás és elforgatás jellegű mozgást, valamint a síkra merőlegesen, vertikális irányban mozog. A CT eszközök több generációja és változata ismert annak megjelenése óta, melyek az alkalmazott források és detektorok számában és elrendezésében, illetve a felvételezés geometriai kivitelezésében különböznek. A korszerű modellekkal a felvételezési idő a töredékére csökkenthető a korai modellekéhez képest, ami, a többi technikai újítással együtt, a páciensre érő sugárdózis nagymértékű csökkenését eredményezi.

A CT generációk közül négyet ismertetek, napjainkban a harmadikon alapuló eszközök a legelterjedtebbek a klinikai gyakorlatban. Az első generációs eszközök a síkbeli Radon-transzformáció direkt diszkretizálásán alapulnak, melyre közvetlenül alkalmazhatóak a visszavetítő módszerek. Ezen eszközök egyetlen pontszerű röntgenforrással és az ezzel szemben elhelyezett egyetlen detektorral voltak felszerelve. Működésük során a forrás-detektor rendszer eltolásaira és elforgatásaira volt szükség egy axiális szelet elkészítéséhez, melynek időigénye több perc volt szeletenként. A második generáció eszközeinél a röntgenforrás által kibocsátott sugárnyaláb geometriája közelítőleg egy adott nyílásszögű, síkbeli körcikkk (fan-beam), melyet a szemben elhelyezett detektorsor rögzít. Az eszköz működése hasonló az előző generációéhoz (eltolás és elforgatás), de a többszörös sugarak révén egy szelet időigénye egy perc alá csökkenthető. A fan-beam projekciókból a detektorok megfelelő elhelyezése esetén egyszerű átrendezéssel, ellenkező esetben egy extra interpolációs lépés segítségével nyerhető a visszavetítésre alkalmas diszkretizáció. A harmadik generáció újítása a nyílásszög növelése és a detektorsor bővítése. Ezáltal működés során eltolási mozgásra nem, csak elforgatásra van szükség, mivel a fan-beam lefedi közel az egész objektumot. Egy körbefordulás időigénye így másodpercekre, illetve az alá is csökkenthető. Jellemzően a detektorsor geometriája is változik, míg a második generációra inkább az egy egyenes, a harmadik generációra a körív mentén elhelyezett detektorok a jellemzőbbek. A negyedik generáció a detektorsor mozgásával szakít, a detektorok itt a gyűrűn körben helyezkednek el, számuk rögzített, csak a röntgenforrás(ok) körbeforgatása szükséges (fan-beam geometria). Ezen elrendezés segítségével még tovább csökkenthető a felvételezési idő, közel pillanatszerű felvétel készítésére nyújt lehetőséget. A harmadik-negyedik generációs eszközök esetén további lehetséges fejlesztés a kúp geometriájú sugárnyaláb (cone-beam), valamint több detektorsor használata, amely egyszerre több szelet elkészítését teszi lehetővé a megfelelő interpoláció alkalmazásával. A későbbi generációk speciális igények kiszolgálására kerültek kifejlesztésre, általános célú alkalmazásra nem terjedtek el.

A vertikális mozgás tekintetében axiális és spirális felvételezési módot különböztethetünk meg. Axiális mód esetén az eszköz az axiális síkban egyetlen körbefordulást végez, majd ezt követi a vertikális irányú elmozdulás. Ez a modell a Radon-transzformáció közvetlen alkalmazásának tekinthető, egy körbefordulásból egy szelet rekonstruálható. Spirál módban az axiális mozgással egyidejűleg történik a vertikális irányú elmozdulás, így a röntgenforrás egy térbeli spirál mentén mozog az objektum körül. A spirális móddal még tovább csökkenthető a teljes felvételezési idő, viszont a szeletek nem rekonstruálhatóak közvetlenül, további interpoláció szükséges a visszavetítéshez.

5.1.4. Alacsony dózisú CT

A kutatásom motivációjául szolgáló alacsony dózisú CT során az alkalmazott röntgensugár intenzitását csökkentik, vagy csőfeszültségét növelik a hagyományos CT sugarához képest, amely a páciensre érő sugárdózis csökkenését eredményezi. A dózis csökkentése azonban a képminőség romlását, zaj és artifaktumok megjelenését okozhatja. A módszer azonban még így is kiemelt jelentőségű a gyakorlat szempontjából, mivel lehetővé teszi a CT szélesebb körű alkalmazását, például tüdőszűrési feladatok ellátására. A tüdőszűrés napjainkban röntgenfelvételek kiértékelésén alapul, melyek felhasználhatósága korlátozott lehet. Másrészt viszont a hagyományos CT alkalmazása nem indokolt annak sejtkárosító hatása miatt. A köztes megoldást az alacsony dózisú felvételezés jelenti. A hagyományos CT és röntgenfelvételeknél lényegesen rosszabb tényleges felbontás mellett, de mégiscsak 3D képet ad a vizsgált páciensről, melyen kellő nagyságú anatómiai képletek már detektálhatóak. A röntgen, alacsony dózisú, és normál CT felvételek által okozott sugárterhelést az 5.1. táblázatban foglalom össze [RehBer00; Lar+11] alapján, összehasonlítva a háttérsugárzás okozta terheléssel.

5.1. táblázat. Tüdő röntgen és CT sugárterhelésének összehasonlítása

Esemény	Sugárterhelés
Éves háttérsugárzás	2.4 mSv
Tüdő röntgen	0.02 mSv
Tüdő CT	8 mSv
Alacsony dózisú tüdő CT	1.4 mSv

5.1.5. Feldolgozási problémák

A CT képképzés és képfeldolgozás napjaink intenzíven kutatott területe. A képképzés jellegéből adódóan annak szükséges eszköze a számítógép-vezérelt rekonstrukció. Az eszközök fejlődésével, a mérnöki és technikai megvalósítások mellett, folyamatosan szükséges a rekonstrukciós algoritmusok, valamint a beépített szűrők fejlesztése is. Másrészt kiemelt feladat a felvételek automatikus feldolgozása és kiértékelése, amely, az automatikus EKG feldolgozáshoz hasonlóan, hatékonyan segítheti az orvosszakértők munkáját, illetve ipari alkalmazások esetén automatikus kiértékelést tehet lehetővé. Jellemző képképzési és képfeldolgozási feladatok (lásd [Dou09]) a zaj és artifaktumok szűrése, a képminőség mérése és javítása, detektálás (pl.: daganatos elváltozások, és más anatómiai képletek), szegmentálás (pl.: szövethatárok, érhalózat), valamint regisztráció más modalitásokkal. Megjegyzendő, hogy a feladatokra általában nem adható egzakt megoldás, így indokolt azok folyamatos

fejlesztése (pl. a megbízhatóbb és pontosabb detektálás érdekében), illetve a módszereknek reflektálni kell a technikai újítások nyújtotta kihívásokra is.

5.1.6. Zaj és artifaktumok

A CT képek felvételezés és a rekonstrukció során is torzulásokat szenvedhetnek, utóbbiak műtermékek, ún. *artifaktumok* megjelenését okozhatják a képeken. A legjellemzőbb, CT képfeldolgozás szempontjából releváns zajforrások és artifaktumok, azok modellezése és lehetséges szűrési módszerei a következők (lásd [BoaFle12]):

Elektromos zaj. Az elektromos rögzítőeszköz működéséből eredő zaj. Képfüggetlen additív fehér zajként jelenik meg a szinogramon, a rekonstruált kép kontrasztjának csökkenését, szemcséssé, kásássá válását okozhatja. Matematikailag nulla várható értékű, normális eloszlású valószínűségi változóként modellezhető detektor-pixelenként (lásd 5.3. *Zajmodellezés és CT szimuláció*). Szűrése többféle módszerrel lehetséges mind a projekción, mind a képtérben: átlagoló szűrő, Gauss-szűrő, bilaterális szűrő, anizotrop diffúzió, stb. Megjegyzendő, hogy ezek a módszerek alkalmasak lehetnek a jel-zaj arány növelésére, de emellett mellékhatásként a kép élességének romlását, a határfelületek elmosódását, kis méretű képletek eltűnését okozhatják.

Kvantumzaj. A fény kvantum természetéből, a fotonok fizikai viselkedéséből adódó zaj. Képfüggő zaj, hatása függ a röntgensugár intenzitásától. Matematikailag Poisson-eloszlású valószínűségi változóként modellezhető (lásd 5.3. *Zajmodellezés és CT szimuláció*). Hatása és szűrése általánosságban hasonló az elektromos zajéhoz, a Poisson és normális eloszlás közötti kapcsolat révén.

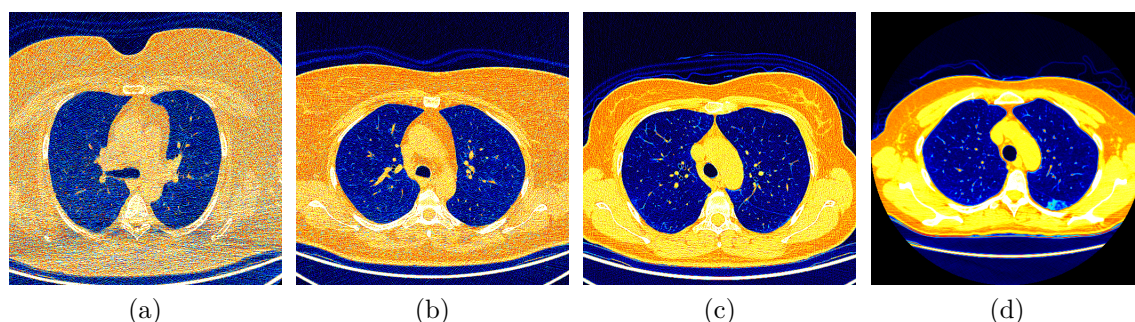
Ring artifaktum. Az eszköz hibás működéséből vagy beállításából származó zaj. A hibás vagy rosszul kalibrált detektor a rekonstruált képen körök, körívek, illetve gyűrűk megjelenését okozhatja. Szűrése a hibás detektor-pixel korrekációjával lehetséges.

Streak artifaktum. Az egyik legjellemzőbb CT artifaktum, melynek során egyenes vonalak és sávok jelennek meg a rekonstruált képen, jellemzően a nagy elnyelődésű régiók (pl. csont) mentén. Megjelenése több hatásra vezethető vissza. Kiválthatja eszközhiba, egyes detektorok időleges meghibásodása. Okozhatja a sugárnyaláb intenzitásának extrém lecsökkenése (*foton éhezés*). A nagy elnyelődésű régiókon áthaladva ugyanis a sugarak intenzitása olyan mértékben lecsökkenhet, hogy az érintett sugarak bizonytalansága nagy mértékben megnő, a kvantum viselkedés miatt. További kiváltó ok lehet a sugárnyaláb közepes energiájának eltolódása (*felkeményedése*), ekkor a nem tökéletesen monokromatikus röntgensugár különböző energiájú fotonjai különböző mértékben kerülnek elnyelődésre az objektumban történő áthaladás során, ami a sugárnyaláb spektrumának megváltozását okozza. A jelenség a lineáris gyengítési együttható energiafüggése miatt problémás, nagy elnyelődésű régiók

mentén egyenesek megjelenését okozhatja. A streak artifaktum hatásának csökkentése a projekció, illetve a képtér szűrésével, valamint iteratív rekonstrukciós módszerek alkalmazásával lehetséges. A felkeményedés kapcsán megjegyzendő, hogy az más artifaktumot, a homogén régiók intenzitásának megváltozását, azok külső régióinak világosabbá válását is okozhatja a rekonstrukció során (*cupping artifaktum*). Ez a jelenség azonban a CT eszköz megfelelő kalibrációjával szinte teljesen eliminálható.

Kvantálási zaj. A folytonos Radon-transzformáció diszkretizálásából származó hatások. A gyakorlati megvalósítás során keletkező színogram a Radon-transzformált egy diszkrét mintavételezése, adott irányú és helyzetű egyenesek mentén. Ennek megfelelően a rekonstrukció során a visszavetítés diszkrét közelítése szükséges, amely további hibák megjelenését okozhatja a rekonstruált képen. A különböző fejlett technikák (fan-beam, cone-beam, spirális felvételezés) során alkalmazott interpolációs lépések is zajforrássul szolgálhatnak. A diszkrét mintavételezés speciális esete a hiányos rekonstrukció, amikor a sugárnyaláb nem fedi le a teljes objektumot. Így a színogram egyes tartományairól semmilyen információval nem rendelkezünk, amely torzítja a rekonstruált képet.

Általánosságban a zaj és artifaktumok megjelenésének mértéke függ az eszköz fizikai és technikai paramétereitől, valamint a vizsgált objektumtól is. Speciálisan, az alacsony sugárdózis alkalmazása a fenti hatások felerősödését okozhatja. Az 5.2. ábrán három, különböző minőségű alacsony dózisu (a-c) és egy normál dózisu (d) felvétel látható, melyeken főként az elektromos és kvantumzaj hatása, részben streak artifaktum (a) figyelhető meg.



5.2. ábra. Különböző minőségű alacsony dózisu tüdő CT felvételek

Adatok forrása: Pozitron Diagnosztika Központ, LIDC-IDRI

5.1.7. Adatbázisok

Munkám során három adatbázissal foglalkoztam: a *Pozitron Diagnosztika Központ* felvételeivel, valamint a publikus *ELCAP* [Ree+09] és *LIDC-IDRI* [Arm+11] adatbázisokkal. A *Pozitron Diagnosztika Központ* a Numerikus Analízis Tanszékkel közös kutatás jegyében bocsátott rendelkezésünkre egy 20 felvételt tartalmazó,

alacsony dózisu tüdő CT adatbázist, anonimizált módon. A felvételeket a későbbi képminőségmérés kiértékeléséhez a központ orvosszakértői a képminőségre vonatkozó szubjektív annotációkkal is ellátták. Az ELCAP adatbázist a Cornell University szakértői állították össze az Early Lung Cancer Action Program keretében, 50 alacsony dózisu CT felvétel felhasználásával. Az adatbázis célja a detektálóalgoritmusok összehasonlítása alacsony dózisu CT esetén, a felvételekhez a diagnosztizált daganatos elváltozások annotációi is elérhetőek. A LIDC-IDRI adatbázis a Lung Image Database Consortium gyűjteménye, melyet a Image Database Resource Initiative projekt keretében állítottak össze, több kutatóintézet és orvosi központ bevonásával. Az adatbázis 1018 normál dózisu tüdő CT felvételt tartalmaz, az egyes esetek diagnosztikai kiértékelésével, és az esetleges daganatos elváltozások annotációival.

5.2. Problémafelvetés és előzmények

A komputertomográfia alkalmazása során orvosi szempontból a legkomolyabb problémát a páciensre érő sugárterhelés jelenti. A kutatásom motivációjául az alacsony dózisu tüdő CT felvételek szolgáltak, melyek a CT felvételek szélesebb körű alkalmazását teszik lehetővé, például tüdőszűrésre. A módszer klinikai előnyét jelentő csökkentett sugárdózis azonban a felvétel képminőségének romlásához, a képzaj felerősödéséhez vezet, emiatt annak orvosi diagnosztikai felhasználása során nehezebben azonosíthatóak lehetnek az egyes anatómiai képletek. A felvételek kiértékelésének egyik lehetséges szempontja tehát a képminőség kérdése, vagyis olyan mennyiségek generálása, amely objektívan jellemzi a kép érzékelhető minőségét, ahogyan az a későbbi feldolgozást és kiértékelést befolyásolhatja.

A képminőségmérés kiterjedt szakirodalommal rendelkezik (lásd [LinKuo11]), eredményei napjainkra a képfeldolgozási algoritmusok tesztelésének szokványos eszközeivé váltak. Az általános célkitűzésük a vizuális tartalom minőségének jellemzése az emberi érzékelésnek, vagy a feldolgozási célnak megfelelően. Ezt automatikus mérési módszerek, ún. *képminőséget mérő metrikák* segítségével teszik meg, melyek a vizsgált kép minőségét egy objektív mérőszám segítségével jellemzik. A kép jellegétől függően a metrikák többféle megközelítésen alapulhatnak: az emberi látórendszer modellezésén, a kép adott minőségbeli jellemzőinek elemzésén, illetve a képrögzítésre jellemző torzulások (zaj és artifaktumok) vizsgálatán. A gyakorlatban elterjedt módszerek többsége egy ún. *referenciakép*, a vizsgált kép jó minőségű, torzítatlan változatán, és az azzal történő összehasonlításon alapul (*FR* – *full reference* metrikák). A legismertebb változatok a vizsgált és a referenciakép közötti hiba mérésén alapuló MSE és SNR (lásd 1.3.2. *Hibafüggvények a jelfeldolgozásban*), a köztük lévő hasonlóságot vizsgáló SSIM (*structural similarity*) [Wan+04], és a természetes képek elemzésén alapuló VIF (*visual information fidelity*) [SheBov06] metrikák. Mivel CT

képek esetén jellemzően nem áll rendelkezésre egy jó minőségű referenciakép, így főként a referenciakép nélküli (*NR – no reference*) metrikák használata jöhet szóba. Kivételnek lásd [PfiBre14], ahol SSIM és RMSE alapján értékelték ki alacsony dózisu felvételek iteratív rekonstrukciós eljárásait egy hagyományos felvétel segítségével. CT felvételek esetén elsősorban a CNR és SNR metrikák használata ismert a szakirodalomban (lásd [Bus+02], 255–292. oldal), melynek során egy szöveti és egy háttér régió kerül összehasonlításra, általában nem automatizált módon, hanem a régiókat kézzel kijelölve. Az általános NR metrikák közül a természetes képek modellezésén alapuló módszerek nem alkalmazhatóak, révén a CT képek nem természetes környezetünk látható fénytartományban rögzített felvételei. Ígéretesek viszont a torzításelemzésen alapuló módszerek, mint például a Q metrika [ZhuMil10], ugyanakkor ezen módszerek gyakori hibája, hogy csak relatív értelemben mérik a képminőséget, azaz ugyanazon kép eltérő minőségű változatai között különbséget tudnak tenni, de két különböző kép esetén nem összemérhető az eredményük. Összességében elmondható, hogy ugyan a képminőségmérés kiterjedt irodalommal rendelkezik, módszerei elsősorban az FR metrikákra fókuszálnak. Céljük elsősorban a képfeldolgozási módszerek kiértékelése, másodsorban a természetes képek (pl. fényképek) elemzése, harmadrészt speciális torzulások elemzése és modellezése. Speciálisan, CT képek esetén viszont nincs kiforrott módszertan az alacsony dózisu CT képek képminőségének elemzésére, a kutatási motivációm ezért ennek megalapozása volt, megfelelő vizsgálati keretrendszerrel egyetemben.

A képminőségmérő metrikák teszteléséhez NR esetben is szükséges referencia-adat, vagyis a vizsgált kép torzítatlan, vagy valamilyen módon annotált változata. Ez a vizsgált CT képek esetén nem állt rendelkezésre, így csak azok szubjektív kiértékelésére volt lehetőség orvosszakértők bevonásával (lásd 5.6. *Eredmények értékelése*). Tesztelési célból tehát érdemes lehet CT szimulációval foglalkozni, vagyis a CT képkalkotás folyamatát követve adott modell szerinti CT képeket szintetizálni. Itt az adott modell lehet egy matematikai fantom (lásd Shepp–Logan), valamint a szimuláció során lehetőség van a képkalkotás során fellépő zaj modellezésére is. Ezáltal adott szempontoknak megfelelő CT képek szintetizálására nyílik lehetőségünk, a zaj típusának és szintjének szabályozása mellett, amely így mesterséges tesztadatként szolgál az algoritmusunk kiértékeléséhez.

5.3. Zajmodellezés és CT szimuláció

Munkám során a CT képkalkotás modellezését a Beer–Lambert elnyelődési törvény szerint végeztem, monokromatikus röntgensugarakat feltételezve, a szenzoron mérhető elektromos és kvantumzaj modellezésével. A módszer ugyan nem fedi le a gyakorlat során fellépő összes hibaforrást (nem kezeli például a röntgensugarak

felkeményedésének modellezését), a gyakorlati tapasztalatok szerint a képalkotás képminőségmérés szempontjából elégséges modelljét adja, révén a CT zaj és artefaktum típusok egyaránt előállhatnak a segítségével. Megjegyzendő, hogy implicit módon kvantálási zaj is megjelenik a szimulált szűrt visszavetítés során.

A modellt a [Foi+08] cikkben ismertetett, elektromágneses szenzorok segítségével rögzített felvételek jellemzésére alkalmas zajmodell nyers CT képekre történő adaptálásával nyertem. A modell az elektromos és kvantumzaj együttes modellezésére ad lehetőséget valószínűségi alapon. Ehhez tekintsük előbbi Gauss-zajként, utóbbi Poisson-zajként történő modellezését. Tekintsük a CT képalkotás folyamatát, és vizsgáljuk egyetlen röntgensugár áthaladásakor a detektor viselkedését. Jelölje $I_0 \in \mathbb{R}^+$ a röntgensugár kezdeti intenzitását, $I \in \mathbb{R}^+$ az ideális, zajmentes intenzitás értéket, mely a Beer–Lambert-törvényből adódna. Jelölje továbbá $I_{zaj} \in \mathbb{R}^+$ a ténylegesen mért intenzitás értéket, melyeket I zajjal terhelt változatának tekintünk. A két zajtípus két, egymástól független additív hatásként modellezhető:

$$I_{zaj} = I + \eta_p(I) + \eta_g,$$

ahol η_g nulla várható értékű $b > 0$ szórású normális eloszlású valószínűségi változó:

$$\eta_g \sim \mathcal{N}(0, b),$$

amely az elektromos zaj modellje, $\eta_p(I)$ pedig $\chi > 0$ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változóból származtatható:

$$\chi(I + \eta_p(I)) \sim \mathcal{P}(\chi I),$$

amely a kvantumzaj modellje. A Poisson-eloszlás statisztikai tulajdonságai alapján a Poisson-zaj is nulla várható értékű, de képfüggő szórású:

$$E(\eta_p(I)) = 0, \quad D^2(\eta_p(I)) = \frac{I}{\chi}.$$

Hasonlóan az I_{zaj} várható értéke I , szórása pedig I -től függő:

$$E(I_{zaj}) = I, \quad D^2(I) = aI + b,$$

ahol $a := 1/\chi$. Tekintsük most a Poisson-eloszlás normális eloszlással történő közelítését a centrális határeloszlás alapján:

$$\mathcal{P}(\lambda) \approx \mathcal{N}(\lambda, \lambda),$$

így a modell közelíthető egy, mindkét zajforrást figyelembe vévő, normális eloszlású $\eta(I)$ valószínűségi változóval:

$$\eta(I) \sim \mathcal{N}(0, aI + b),$$

azaz

$$\eta(I) = \xi \sqrt{aI + b} \quad (\xi \sim \mathcal{N}),$$

melyre

$$I_{zaj} \approx I + \eta(I) = I + \xi \sqrt{aI + b}.$$

A közös modellben a zaj mértékét az $a, b \in \mathbb{R}^+$ paraméterek jellemzik. Előbbi a rögzítőeszköz érzékenységet és a kvantumzaj mértékét, utóbbi pedig az elektromos zaj erősségét határozza meg. A modell, melyet itt egyetlen detektorra fogalmaztam meg, kiterjeszthető detektorok egy sorozatára, így a teljes szinogramra is. Ugyan az a és b paraméterek kismértékű varianciája lehetséges az egyes detektorok között, azokat, a detektorok megegyező típusára és a hasonló fizikai körülményekre tekintettel, egységesnek tekintetem.

Mivel a nyers CT képek szinogramjait az intenzitások arányából képezhetjük, így célszerű a fenti modellek kiterjesztése. Ez megtehető módosított $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}^+$ paraméterekkel:

$$\frac{I_{zaj}}{I_0} \approx \frac{I}{I_0} + \xi \sqrt{\frac{a}{I} \frac{I}{I_0} + \frac{b}{I_0}} = \frac{I}{I_0} + \xi \sqrt{\tilde{a} \frac{I}{I_0} + \tilde{b}}.$$

A CT szimuláció lehetséges, flexibilis eszközei a fantommodellek (lásd 5.4. *Tüdőfantom-konstrukció*), melyeknek képezhető zajmentes szinogramja a Radon-transzformáltjuk mintavételezésével. A szimuláció során a szinogram Beer–Lambert-törvény szerinti transzformációjából előállítható az intenzitások hányadosa, melyhez adjunk zajt a fenti modell szerint generálva. Ennek visszatranszformálásával adódik a zajjal terhelt szinogram, amely szűrt visszavetítésével rekonstruálható. A szimuláció eredménye tehát egy szintetizált kép az eredeti fantom alapján, melynek torzítatlan változata (a fantom maga) ismert, továbbá a megjelenő zaj erőssége a zaj definiáló paraméterei alapján szabályozható. A szimuláció konkrét fizikai paramétereit a Pozitron Diagnosztika Központ fejlesztéshez használt felvételei alapján határoztam meg: a röntgensugarak energiáját 57 KeV-nak, a csőáramot 30 mAs-nek, a csúcspotenzitást pedig 130 kVp-nek feltételezve $\mu_{H_2O} \approx 0.2 \text{ cm}^{-1}$ értékkel dolgoztam, 0.055 – 0.07 cm, középértéken 0.06 cm pixeltávolságot tekintve. Ez a μ gyengítési együttható L egyenes mentén vett $\mathcal{R}\mu(L)$ profiljának

$$\frac{I}{I_0} := \exp(-0.2 \cdot 0.06 \cdot \mathcal{R}\mu(L)),$$

illetve

$$\mathcal{R}\mu_{zaj}(L) := -\frac{1}{0.2 \cdot 0.06} \ln \frac{I_{zaj}}{I_0}$$

transzformációival érhető el. A Radon-transzformációt illetően párhuzamos sugarakkal, polárkoordináták alapján történő mintavételezést tekintetve, a szögelfordulás szerint 0.5° lépésközzel, a távolság szerint pedig a kimeneti kép 512×512 felbontása alapján. A szögelforduláshoz más, 0.1° , 0.5° és 1° szerinti lépésközöket is vizsgáltam, de a kvantálási zaj és a szinogram méretéből adódó futásidő figyelembe vételével 0.5° bizonyult az optimális választásnak. A szimuláció eredménye egy axiális CT felvétel egy szeletének modellezésére szolgál, de könnyen kiterjeszthető 3D-re és más elrendezés esetére is.

5.4. Tüdőfantom-konstrukció

Az adatbázisokon történő kiértékelés mellett a CT képfeldolgozás fontos eszközei a *fantomok*. Az gyakorlatban két fantomtípus, a fizikai és matematikai fantomok használata ismert. A fizikai fantom egy olyan anyagokból felépített objektum, melyek elnyelése közelítőleg megegyezik a vizsgálni kívánt anyag (pl. szövettípus) elnyelésével. A fizikai fantomok elengedhetetlenek a CT eszközök kalibrációjához, de alkalmazhatók az algoritmusfejlesztés során is, révén felépítésük a kívánt igényeknek megfelelően alakítható ki. A másik megközelítés a matematikai fantomok, melyek az emberi test egyes részeit reprezentáló matematikai modellek. A matematikai fantom, a CT eszköz működésének ismeretében, szintetizált képek létrehozására nyújtanak lehetőséget, mellyel különböző beállítások és zajszintek szimulálhatóak. Mindkét fantomtípus jelentős az algoritmusok kiértékelése szempontjából. Lehetővé teszik, hogy egy objektumról több, különbözőképpen rögzített felvétel álljon rendelkezésre, továbbá vizsgálható rajtuk keresztül az objektumok kismértékű változtatásának hatása. Ezen feltételek humán CT felvételezés esetén nem állnak fenn, révén egy páciensről jellemzően egy, vagy csak néhány felvétel áll rendelkezésre. A matematikai fantomok, ugyan csak szintetizált környezetben, de még szélesebb körű tesztelésre adnak lehetőséget, mivel kiértékelésükhöz nem szükséges a CT eszköz üzemeltetése, valamint változtatásukhoz nem szükséges a fantom fizikai átalakítása.

5.4.1. Matematikai fantommodellek

A következőkben a Radon-transzformáción alapuló matematikai fantommodelleket mutatom be. Tekintsük a CT képek egy szeletét, melyet modellezzünk ellipszisiek kompozíciójaként. Ez egyrészt igazodik a humán CT képek szerkezetéhez: az azon megjelenő egyes szöveteket tekinthetjük lokálisan homogén, körülhatárolható objektumoknak, így az ellipsziszfantom megfelelő sematikus modellként értelmezhető.

Másrészt az ellipszisek Radon-transzformáltja egyszerűen, explicit módon kifejezhető, így egy könnyen kiértékelhető analitikus modellhez jutunk. Az első, legismertebb ilyen modell a klasszikus Shepp-Logan fantom [SheLog74], amely az agy sematikus modellje, az 5.3. ábrán látható módon.



5.3. ábra. Shepp-Logan agyfantom

Az ellipszisfantomok bevezetéséhez tekintsük az egységsugarú körlap Radon-transzformációját. Jelölje

$$f(z) := \chi_{[0,1]}(\|z\|_2) \quad (z \in \mathbb{R}^2),$$

az egységdiszk karakterisztikus függvényét, melynek Radon-transzformáltja

$$\mathcal{R}f(r, \varphi) = \chi_{[0,1]}(|r|) \cdot 2\sqrt{1-r^2} \quad (r \in \mathbb{R}; \varphi \in [0, \pi)).$$

Az affin transzformációra vonatkozó összefüggések segítségével ez alapján kifejezhető tetszőleges sugarú és középpontú körlap, továbbá tetszőleges méretű és orientációjú ellipszis Radon-transzformáltja is. A képletek közül itt csak az origó középpontú, a koordinátarendszer tengelyeivel párhuzamos orientációjú, $A, B \in \mathbb{R}_0^+$ tengelyű

$$f(z) := \chi_{[0,1]} \left(\frac{z_1^2}{A^2} + \frac{z_2^2}{B^2} \right) \quad (z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2)$$

ellipszis Radon-transzformáltját ismertetem:

$$\mathcal{R}f(r, \varphi) = \chi_{[0, R_{A,B}(\varphi)]}(|r|) \cdot \frac{2AB}{R_{A,B}^2(\varphi)} \sqrt{R_{A,B}^2(\varphi) - r^2} \quad (r \in \mathbb{R}; \varphi \in [0, \pi)),$$

ahol

$$R_{A,B}(\varphi) := \sqrt{A^2 \cos^2 \varphi + B^2 \sin^2 \varphi} \quad (\varphi \in [0, \pi)).$$

Más középpontú és elforgatott ellipszisek könnyen kifejezhetőek a transláció- és forgatásoperátorok alkalmazásával. Legyenek most $f_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ ($k = 1, 2, \dots, n; n \in \mathbb{N}^+$) ellipszisek karakterisztikus függvényei a síkon, $\alpha_k \in \mathbb{R}$ pedig azok intenzitása. Ekkor a fantommodellünk

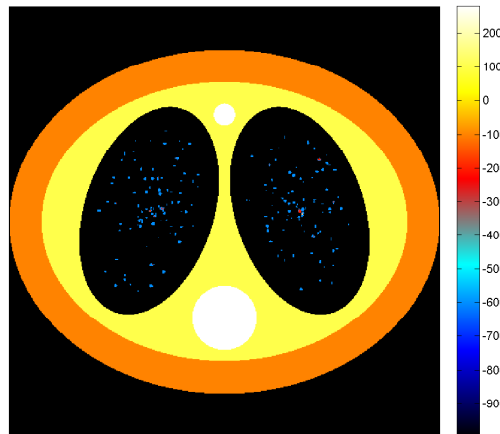
$$f := \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k$$

alakú, melynek Radon-transzformáltja

$$\mathcal{R}f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathcal{R}f_k,$$

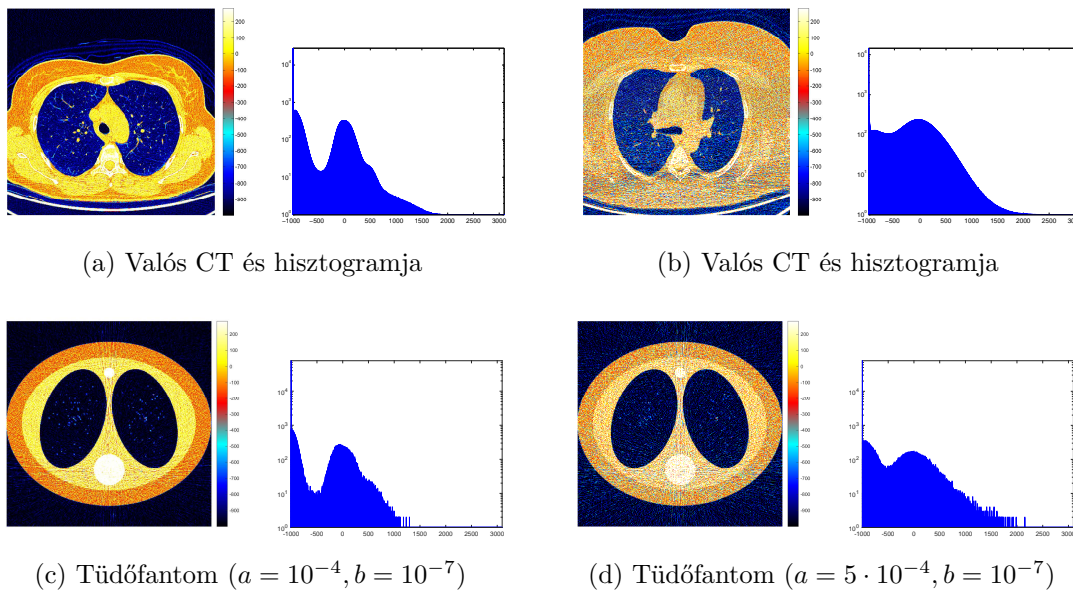
ahol az egyes ellipszisek Radon-transzformáltját a fenti módon számolhatjuk.

5.4.2. Tüdőfantom



5.4. ábra. Tüdőfantom

A tüdőfantom konstrukciója során az volt a célom, hogy egy, a Shepp–Logan fantomhoz hasonló, ellipszisekből felépített tüdőmodellt készítssek. A modellel szemben elvárásom az volt, hogy a fenti szimulációval az alacsony dózisú tüdő CT egy szelvényéhez hasonló karakterisztikájú és viselkedésű szintetizált képeket kapjak, melyek képminősége a zajparaméterektől függ. A javasolt modell zsír-, izom-, és csontszövetet reprezentáló 6 nagy ellipszisekből, és a tüdőszövetet reprezentáló 100-100 kis-méretű, véletlenszerűen elhelyezkedésű és méretű ellipszisekből áll (lásd 5.4. ábra). A pontos specifikációhoz lásd az 5.2. táblázatot. Az ellipszisek méretét és elrendezését úgy igyekeztem meghatározni, hogy a tüdőfantom segítségével szintetizált képek hisztogramja, megfelelő zajszint mellett, kövesse a valós felvételek hisztogramját. Az 5.5. ábrán valós CT felvételek és hisztogramjaik, valamint a tüdőfantom alapján $a = 10^{-4}$, illetve $a = 5 \cdot 10^{-4}$ és $b = 10^{-7}$ zajparaméterek mellett szintetizált



5.5. ábra. Alacsony dózisu tüdő CT képek és a tüdőfantom összehasonlítása

Adatok forrása: Pozitron Diagnosztika Központ

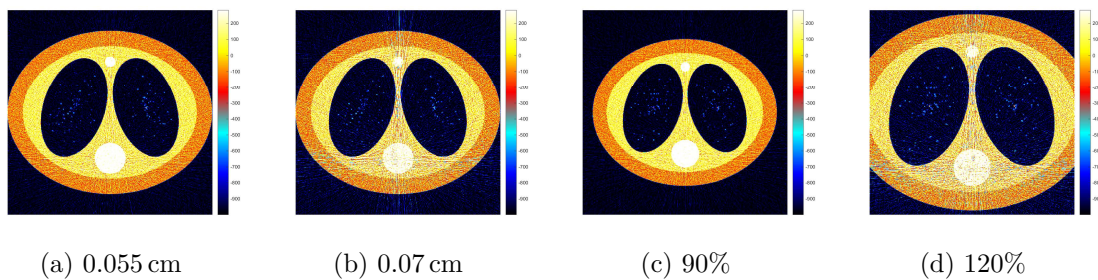
felvételek és azok hisztogramjai láthatók. A vizuális kiértékelés és a hisztogramok közötti kvantitatív kapcsolat alátámasztja, hogy az így konstruált tüdőfantomot a tüdő CT képek sematikus közelítésének tekinthetjük. Megállapítható továbbá, hogy a szintetizált képeken megjelenő zaj és artifaktumok megfelelnek a CT képalkotás ismert torzulásainak.

A tüdőfantom segítségével végeztem a kidolgozott képminőségmérés objektív kiértékelését. Ennek bevezetése előtt viszont tekintsük a tüdőfantom további tulajdonságait, amely további indoklásul szolgál a modell helyességére. Az előbb bemutatott 5.5. ábrán látható, hogy a két valós CT kép közötti különbség forrása nem feltétlenül a felvételezés módja, hanem páciens testalkata. A gyakorlati tapasztalat mellett az elvi megfontolás, a zajmodell szórásának intenzitástól való függése is alátámasztja a vizsgált objektum méretének növekedéséből adódó zajszint-növekedést. Ugyanakkor,

5.2. táblázat. A tüdőfantom specifikációja

Árnyalat	Tengelyek	Középpont	Elforgatás
-100	1 0.8	0 0	0°
200	0.85 0.65	0 0	0°
-1100	0.3 0.5	-0.35 0.05	-18°
-1100	0.3 0.5	0.4 0	18°
400	0.2 0.2	0 -0.45	0°
400	0.1 0.1	0 0.5	0°
100 × 400	(véletlen)	(véletlen)	0°
100 × 400	(véletlen)	(véletlen)	0°

pont a zajmodell szerkezete alapján, ez a hatás szimulálható a zajparaméterek növelésével is. Ennek teszteléséhez tekintsük a szimuláció pixeltávolság közepes 0.06 cm értékének megváltoztatását, illetve a fantom megnövelését, azonos zajparaméterek mellett (lásd 5.6. ábra). Látható, hogy pusztán a méret növelése a zajszint implicit megváltozását okozza, ami összhangban van a zajparaméterek változtatásával. Megállapítható tehát, hogy a tüdőfantom segítségével végzett szimuláció alkalmas lehet egy CT képminőségmérő metrika tesztelésére, valamint a kiértékelés során elegendő a zajparaméterek változtatásával foglalkozni, rögzített fantom és fizikai paraméterek mellett.



5.6. ábra. Tüdőfantom átméretezésének hatása

Adatok forrása: Pozitron Diagnosztika Központ

5.5. Képminőségmérési módszertan

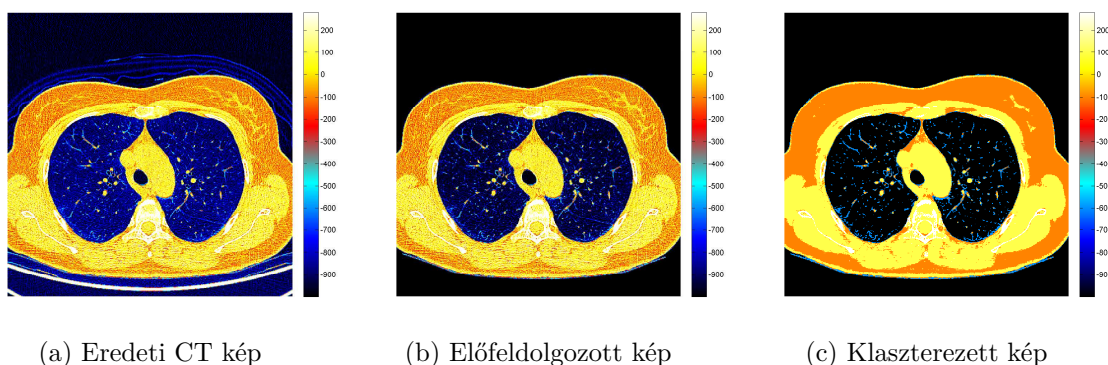
5.3. táblázat. Az intenzitás szerinti klaszterezés középvértékei

Anyag	Prototípus (HU)
Levegő	-1000
Tüdőszövet	-600
Zsírszövet	-100
Izomszövet és belsőszerv	100
Csontszövet	500

A javasolt képminőségmérési metrika alap gondolata a CT képek szerkezetének vizsgálatából adódik. A fejlesztéshez a Pozitron-Diagnosztika Központ 20 alacsony dózisú tüdő CT felvételét használtam fel, melyek hasonló körülmények között és beállításokkal kerültek rögzítésre. A felvételek vizuális összehasonlítása, valamint a hisztogramjaik és intenzitáseloszlásuk kvantitatív elemzése is a képek hasonló szerkezetét bizonyítja (lásd 5.5. ábra (a) és (b)). A nyilvánvaló hasonlóság anatómiai okokkal indokolható: az egyes páciensek szervezete hasonló felépítésű, az egyes szervei hasonló alakúak és méretűek, valamint hasonló elnyelési tulajdonságokkal rendelkeznek. A tüdő CT felvételek egy belső szeletét tekintve ez hasonló hisztogramokat, és hasonló területi eloszlásokat eredményez: a zsír-, izom- és csontszövet

nagyobb összefüggő homogén régiókat, míg a tüdőszövet kis foltokat vagy vékony vonalakat alkot a szeleteken. A felvételek ezen hasonlósága adja a javasolt módszer alapötletét: klaszterezzük a vizsgált CT szeleteket intenzitás szerint, ahol az egyes klasztereket a szövettípusoknak megfelelően határozzuk meg (lásd 5.3. táblázat). Megfelelő klaszterezés segítségével a CT képek egy szűrt változatát kapjuk, amely ugyanakkor megőrzi az eredeti felvétel anatómiai szerkezetét. Ugyan a szűrt felvétel diagnosztikai célú felhasználása további vizsgálatokat igényel, az felhasználható mint jó minőségű referenciakép. Ez pedig lehetővé teszi megbízható FR metrikák használatát. Az alap gondolat tehát az, hogy vezessük vissza az NR feladatot FR feladatra úgy, hogy megfelelő, adaptív eljárással egy referenciaképnek tekinthető szűrt változatát állítjuk elő az eredeti képnek, kihasználva a CT képek közötti strukturális hasonlóságot.

A kidolgozott módszer egy előfeldolgozási és klaszterezési lépésből áll, melyet a metrika kiértékelése követ. A továbbiakban ezen lépések részleteit, és a fejlesztési szempontokat ismertetem. A módszer objektív kiértékelését a tüdőfantom segítségével szintetizált környezetben, szubjektív kiértékelését pedig orvosszakértők véleményezésének összehasonlításával végeztem. Az alfejezet végén kitérek az eredmények kvantitatív kiértékelésére és más megközelítésekkel való összehasonlításra is.



5.7. ábra. Klaszterezés és előfeldolgozás

Adatok forrása: Pozitron Diagnosztika Központ

5.5.1. Előfeldolgozás

A klaszterezés hatékonysága növelhető, ha azt megelőzi a háttér leválasztása és az alacsony intenzitású gammakorrektúra. A háttér, melyen itt a CT kép testen kívüli részét értem, hagyományos képfeldolgozási technikákkal javasolom leválasztani, a páciens testének közelítő körülhatárolásával. Ehhez itt Gauss- és mediánszűrést, küszöbölést és régiókitöltést használtam. Ez csak a páciens egy közelítő körülhatárolását adja, ami a képminőségmérés szempontjából elégséges, de megjegyzendő, hogy más fejlettebb technikák (lásd pl. aktív kontúrok [KasWitTer88]) pontosabb határ-

vonalat eredményezhetnek. További javulást sikerült elérni az alacsony intenzitású pixelek gammakorrektúrájával, mellyel a tüdőben lévő intenzitáseltolódás csökkenthető. Az előfeldolgozás eredményét az 5.7. ábra szemlélteti.

5.5.2. Klaszterezés

A fenti megfontolások alapján olyan klaszterező algoritmus használata szükséges, amely figyelembe veszi a pixelek területi eloszlását, és homogén régiók kialakítására törekszik. Ugyanakkor, mivel diagnosztikai szempontból a tüdő vizsgálata a releváns, elvárás a tüdőszövet részletességének megőrzése.

A szakirodalom áttekintése alapján az SKFCM klaszterezőt választottam kiindulási pontként, réven ezen algoritmus pont területi homogenitás kialakítására törekszik szabályozható körülmények között. Ugyan a módszer általánosságban jól teljesít, a speciális alkalmazáshoz annak módosítása volt szükséges. Az elvégzett módosításokat a következő pontokban foglalom össze.

Klaszterek. Az SKFCM a klaszterek referenciapontjaira és a particionáló mátrix valószínűségeire végez optimalizációt iteratív módon. Ez a korábban kijelölt referenciapontok megváltoztatását jelentheti, ami numerikus szempontból jobb közelítést eredményez, de a klaszterezett kép elveszítheti a kívánt karakterisztikáját, illetve elveszíthetjük a különböző képek összehasonlíthatóságát. Ennek elkerülése érdekében a klaszterek referenciapontjait rögzítettnek tekintettem az 5.3. táblázat alapján, és csak a particionáló mátrixra végeztem optimalizációt.

Ablakméret. A módszer közvetlen alkalmazásával megfigyelhető, hogy az azonos mértékű területi homogenitás kialakítására törekszik minden egyes klaszterben. Ez, az α paramétertől függően, a tüdőszövet részletességének elvesztését, vagy a nagy kiterjedésű szöveti régiók nem elég homogén kialakítását eredményezi. A jelenség kiküszöbölhető, ha változó méretű ablakokat engedünk meg az egyes klaszterekben.

Súlyozás. Az ablakmérethez kapcsolódó probléma a blokkosodás, amely csökkenthető a pixel szomszédjainak súlyozásával, a távolabbi pixelek kevésbé hangsúlyos figyelembe vételével, például Gauss-szűrő alapján származtatott súlyok használatával.

Iteráció. Az SKFCM változó ablakmérettel és súlyozással módosított optimalizáló kifejezése

$$U \in \arg \min_{U \in [0,1]^{C \times N}} \sum_{k=1}^C \sum_{j=1}^N u_{kj}^m \left(1 - K(x_j, v_k) + \alpha \sum_{r \in N_{kj}} w_{kr} (1 - u_{kr})^m \right)$$

alakú, ahol N_{kj} és w_{kj} a k . klaszterben használt ablak és súlyozás. A kifejezés minimalizálása az eredeti algoritmushoz hasonlóan iteratív módon lehetséges, azonban a

v referenciapontok rögzítése révén csak U frissítése szükséges, amely

$$u_{kj} := \frac{\left(1 - K(x_j, v_k) + \alpha \sum_{r \in N_{kj}} w_{kr} (1 - u_{kr})^m\right)^{-1/(m-1)}}{\sum_{\ell=1}^C \left(1 - K(x_j, v_\ell) + \alpha \sum_{r \in N_{\ell j}} w_{\ell r} (1 - u_{\ell r})^m\right)^{-1/(m-1)}}$$

alapján tehető meg. U inicializálásához tekintsük a kernel FCM szerinti

$$u_{kj} := \frac{(1 - K(x_j, v_k))^{-1/(m-1)}}{\sum_{\ell=1}^C (1 - K(x_j, v_\ell))^{-1/(m-1)}}$$

inicializálását.

Kilépési feltételek. Az iteráció konvergenciája nem garantálható, továbbá túllilesztés, egyes régiók teljesen homogénné alakítása is jelentkezhethet. Ennek kiküszöbölése érdekében a korai leállást, az egyes iterációs lépések közötti megváltozás mértékének korlátozását, illetve a megváltozás ütemének korlátozását javaslom. Az algoritmus módosított változata terminál, ha

- az iteráció elér t_{max} lépést, vagy
- a t lépésben az $E^{(t)} := \|U^{(t)} - U^{(t-1)}\|_\infty$ hibára $E^{(t)} < \varepsilon$, vagy
- $E^{(t)} > \beta E^{(t-1)}$,

ahol $t_{max} \in \mathbb{N}^+$ és $\beta, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ alkalmas, rögzített konstansok.

Paraméterválasztás. A konkrét megvalósításhoz, a CT képeken végzett kiértékelés alapján, 3×3 méretű ablakokat 0.5 szórású Gauss-szűrőből származó súlyokkal javasolok a tüdőszövet, és 9×9 méretű ablakokat 1.5 szórású Gauss-szűrőből származó súlyokkal a többi klaszter esetén. A paraméterekre vonatkozóan $m = 2$, $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.75$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $t_{max} = 10$ megválasztását javaslom. További meghatározandó paraméter a K magfüggvény γ szórási paramétere, melyet a képzajjal fordítottan arányosan érdemes meghatározni. Ez rekurzív problémának tűnhet, révén a teljes klaszterezés célja a képminőség mérése, de az ellentmondás feloldható azzal, hogy itt elég a képzaj durva becslése. Ehhez wavelet-transzformációt javasolok, melynek magasrendű részletegyütthatóinak szórásából következtethetünk a zaj mértékére, és adaptív becslés adható γ -ra. A waveletalapú megközelítés egy egyszerű és gyorsan kiértékelhető becslést eredményez, a kapott szórás mint mérőszám ugyanakkor nem teljesít elég jól a képminőségmérés szempontjából.

Az 5.7. ábrán az előfeldolgozás (b) és a szegmentálás (c) eredménye látható az (a) jelű képre.

5.6. Eredmények értékelése

Az alacsony dózisu tüdő CT felvételek képminőségének mérésére tehát azt javasolom, hogy végezzük el a képek fenti előfeldolgozását és klaszterezését, majd hasonlítsuk össze ezen két képet az SSIM metrika segítségével. A fenti megfontolások alapján a klaszterezett képet referenciaképnek tekintem, amely lehetővé teszi egy általános célú FR metrika használatát. A választott SSIM metrika általánosan elterjedt a gyakorlatban. Itt az általános viselkedése révén tűnik alkalmasnak, mivel a képek strukturális különbségeire reflektál. Az eredmény tehát egy objektív NR metrika, amely $[-1, 1]$, a gyakorlatban $[0, 1]$ közötti mérőszámot rendel a képekhez, ahol a magasabb érték jobb képminőséget jelöl.

A következő pontokban a módszertan kiértékelését tárgyalom többféle szempont szerint: objektív és szubjektív megközelítésből, szintetikus és valós adatokon, valamint más módszerekkel összevetve. Az összehasonlításokat statisztikai tesztek, köztük a két kiértékelés mint adatsor közötti korreláció vizsgálata alapján végeztem. Ehhez legyenek ξ, ζ valószínűségi változók, és tekintsük a (*Pearson-féle*) *korrelációs együtthatót*:

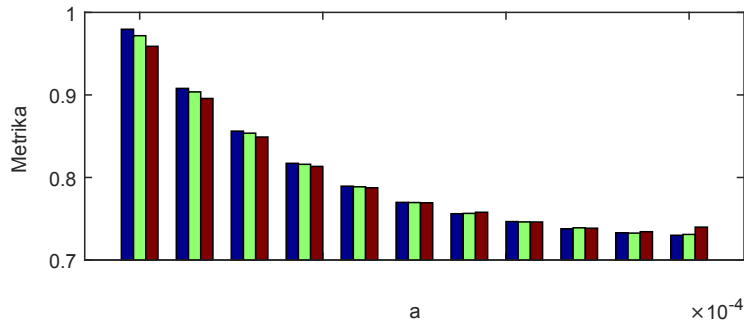
$$\text{corr}(\xi, \zeta) := \frac{\text{cov}(\xi, \zeta)}{D(\xi)D(\zeta)} = \frac{E((\xi - E(\xi))(\zeta - E(\zeta)))}{D(\xi)D(\zeta)}, \quad (5.1)$$

amely a kovariancia szórásokkal normálva. Értéke $[-1, 1]$ közötti, 0 esetén függetlenséget, abszolútértékben magas értékek mellett statisztika kapcsolatot, ± 1 esetén pedig közvetlen lineáris függést sejtet a két adatsor között. Küszöbölésére több megközelítés lehetséges, a továbbiakban 0.6 feletti értékeit a két adatsor között fennálló összefüggésként, 0.8 feletti értékeit pedig szoros kapcsolatként fogom interpretálni. Megjegyzendő, hogy a t -eloszlást tekintve ez kevesebb, mint 0.005, illetve 0.001 szignifikancia szintnek felel meg. A tényleges megvalósításban a két minta

$$\text{corr}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\langle \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}} \rangle}{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_2 \cdot \|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}\|_2} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n; \mathbf{x} \neq \tilde{\mathbf{x}}; \mathbf{y} \neq \tilde{\mathbf{y}}) \quad (5.2)$$

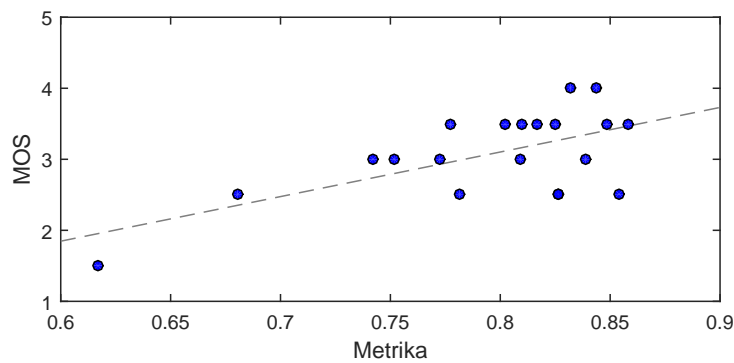
tapasztalati korrelációjával dolgoztam, ahol $\tilde{\mathbf{x}}$ az \mathbf{x} átlagát jelöli.

Fantomtanulmány. A metrika objektív kiértékelését az előzőekben bevezetett zajmodellezés és szimuláció segítségével tüdőfantomokon végeztem. A fent tárgyalt tapasztalatok szerint a tüdőfantom statisztikai és vizuális értelemben is jól modellezi az alacsony dózisu CT képek viselkedését, a szimuláció pedig a képalkotást és a megjelenő torzulásokat. Mindezeket figyelembe véve a szimuláció a metrika objektív kiértékelését teszi lehetővé, melynek során összehasonlíthatóak a mérőszámok és a zajparaméterek. A vizsgálataim azt mutatják, hogy a mérőszám jól követi a zajparaméterek megváltozását, egy alkalmas tartományon belül monoton kapcsolat áll fenn



5.8. ábra. Fantomt tanulmány: a metrika értékei az a zajparaméter függvényében, $b = 5 \cdot 10^{-8}$, 10^{-7} , és $2 \cdot 10^{-7}$ rögzített értékek mellett

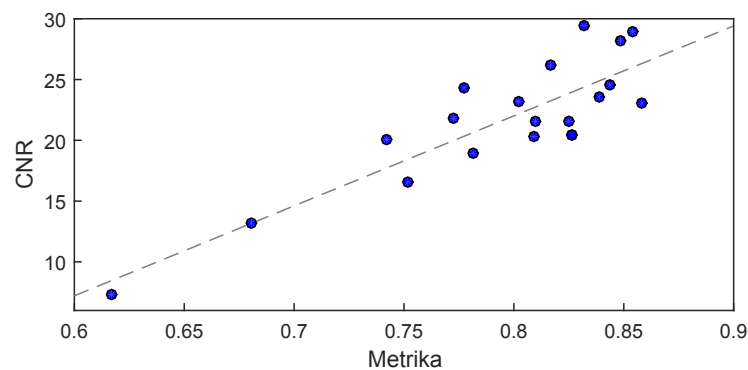
köztük. Az 5.8. ábrán az elektromos zaj három rögzített szintje ($b = 5 \cdot 10^{-8}$, 10^{-7} , és $2 \cdot 10^{-7}$) mellett szemléltetem a kvantumzajt reprezentáló a paraméter változtatásával kapott mérőszámokat. A statisztikai anomáliák kiküszöbölése érdekében az egyes oszlopok 20 szimuláció mérőszámának átlagaként állnak elő. Megállapítható tehát, hogy a mérőszám jól követi a zajszint által meghatározott képminőséget.



5.9. ábra. Orvosszakértői MOS összevetése a metrika értékeivel

Valós CT képek kiértékelése. A valódi, alacsony dózisu CT képek vizsgálata alapján megállapítható, hogy a klaszterezés kellő mértékben megőrzi a CT képek szerkezetét a zaj eltávolítása mellett, továbbá a metrika értéke korrelál a vizuálisan érzékelhető minőséggel. A módszert a Pozitron Diagnosztika Központ fejlesztés során felhasznált képei mellett az ELCAP adatbázis 50 alacsony dózisu, és a LIDC-IDRI adatbázis 20 normál dózisu tüdő CT felvételén is kiértékeltem. Kvantitatív viselkedését tekintve a metrika mérőszáma 0.62 és 0.86 közötti értéket vesz fel a Pozitron Diagnosztika Központ felvételein, 0.66 és 0.86 közötti értéket az ELCAP, valamint 0.83 és 0.94 közötti értéket a LIDC-IDRI adatbázison. A két alacsony dózisu adatbázis hasonló viselkedése, és a normál dózisuval vett összehasonlítás azt mutatja, hogy a mérőszám a várakozásoknak megfelelően kezeli a képminőséget. A magas dózisu felvételek mérőszámai ugyanis magasabb értéktartományban mozognak, mint az alacsony dózisu felvételeké. Az elkülönülés nem éles, de ez nem is várható el, figyelembe véve, hogy egy jó minőségű, alacsony dózisu felvétel akár meg

is közelítheti egy rossz minőségű, magas dózisu felvétel minőségét. A tapasztalatok alapján a mérőszámok 0.6 és 1 közé esnek, ezért indokolt lehet azok transzformációja a könnyebb interpretálhatóság érdekében. Egy lehetséges ilyen transzformáció a $[0.6, 1)$ intervallum 1 és 5 közötti egész számokra történő átalakítása. Ez esetben az alacsony dózisu CT képek mérőszámai 1 és 4 között mozognak, jellemző értékük 3, a normál dózisu képeké pedig 3 és 5 között, jellemző értékük pedig 4. A valós felvételek szubjektív kiértékelését ezen transzformáció mellett végeztem szakértői pontozás alapján. Ennek során a Pozitron Diagnosztika Központ két orvosszakértője értékelte ki a felvételek érzékelhető képminőségét, azokhoz 1 és 4 közötti egész értéket rendelve, ahol 1 jelentette a legrosszabb, 4 pedig a legjobb érzékelhető képminőséget. A két szubjektív kiértékelés átlagaként kapott MOS (*mean opinion score*) értékeket hasonlítottam össze a metrika mérőszámaival. A két mennyiség kapcsolatát az 5.9. ábrán szemléltetem. A korrelációs együttható 0.62, ami jelzi az MOS és a mérőszámok közötti kapcsolatot. A korreláció nem tökéletes, de figyelembe véve, hogy a két szakértő kiértékelése közötti korrelációs együttható is 0.62, így mégis megállapítható, hogy a metrika az orvosszakértők szubjektív megítélését is jól követi.



5.10. ábra. Metrika összehasonlítása a CNR értékével

Összehasonlítás más módszerekkel. A Pozitron Diagnosztika Központ felvételein kiértékeltem az irodalomban szokásos CNR és SNR metrika értékeit is, összehasonlítandó a javasolt metrika mérőszámaival. Ezen metrikák kiértékeléséhez közel homogén háttér és szöveti régió szükséges, melynek megválasztására mindkét módszer erősen érzékeny. Ezen régiókat itt a klaszterezés alapján, félig automatikus módon választottam ki, manuális felülvizsgálva azokat. A statisztikai kiértékelés szoros kapcsolatot mutat a CNR és SNR értékei között, a korrelációs együttható mindkét esetben 0.86 (lásd 5.10. ábra). Ez alapján a javasolt metrika követi a CNR és SNR metrikák szemléletét, ugyanakkor több szempontból előnyösebb azoknál. A CNR és SNR esetén ugyanis sokszor problémás, és nehezen automatizálható a háttér és előtér megfelelő megválasztása. Automatizálásához a kép valamilyen közelítő szegmentálása szükséges, a gyakorlatban pedig jellemzően manuális kijelölés útján történik. Továbbá a mérőszámok kiértékelése csak ezen két területre korlátozódik.

Ezzel szemben a javasolt módszer a teljes kép figyelembe vételével dolgozik, teljesen automatizálható módon, ami indokolja alkalmazását a CNR és SNR metrikákkal szemben. Végül szeretném szemléltetni az NR metrikák általános problémáját a Q metrika kapcsán. A módszer a torzítás elemzésén alapul, mérőszáma pozitív egész szám, melynek nagyobb értéke jelöli a jobb képminőséget. A tüdőfantomon végzett szimuláció azt mutatja, hogy a kapott mérőszám jól jellemzi a zajszintet, ugyanakkor valós CT képek kiértékelésére kevésbé alkalmas. Ennek hátterében az NR metrikák gyakori problémája áll, miszerint lehetővé teszik egyetlen kép különböző minőségű felvételeinek megbízható megkülönböztetését, de több különböző felvétel esetén mérőszámaik nem összemérhetőek, így azok összehasonlítására nem alkalmasak.

5.7. Összefoglalás

Egy új metrikát fejlesztettem ki alacsony dóziszú tüdő CT felvételek képminőségének objektív mérésére, valamint egy CT szimulációs környezetet alakítottam ki egy új tüdőfantom felhasználásával. A következő eredményeket értem el:

1. Adaptáltam egy alkalmas zajmodellt, melynek segítségével mesterséges CT képeket szintetizáltam megfelelő paraméterek alapján.
2. Konstruáltam egy tüdőfantomot analitikus modellek segítségével. A tüdőfantom a CT szimulációval együtt egy jól kezelhető, flexibilis, és kontrollálható modellezési lehetőséget biztosít különböző minőségű tüdő CT képek előállítására.
3. Kifejlesztettem egy referenciakép nélküli képminőségmérő metrikát tüdő CT képek kiértékelésére, melynek eredménye egy összehasonlítható mérőszám. A metrika teljesen automatizált, közvetlenül alkalmazható CT felvételekre. A CT szimuláció és a szubjektív szakértői kiértékelés is alátámasztja a metrika alkalmazhatóságát alacsony és normál dóziszú CT felvételeken egyaránt.

Az eredményeket a [Bog15; Bog16] cikkekben közöltem. A módszer közvetlenül alkalmazható a felvételezés során a felvett kép felhasználhatóságának kiértékelésére, és az alkalmazott sugárdózis adaptív változtatására. Közvetett módon alkalmazható lehet a rekonstrukció során is, például iteratív rekonstrukciós módszerek hibafüggvényeként felhasználva. A módszert ugyan kifejezetten tüdő CT felvételek feldolgozására dolgoztam ki, megfelelő finomhangolás mellett más régiók CT felvételének, vagy akár más modalitások kiértékelésére is felhasználható lehet. Ennek vizsgálata további kutatások tárgyát képezheti. A tüdőfantom és a zajmodellezés alkalmazható lehet algoritmusfejlesztési célra is, az algoritmusok hatékonyságának kiértékeléséhez. Továbbá a szimuláció kiterjeszhető lehet más régiókra alkalmas fantom konstrukciója mellett.

Fejlesztői környezet

A munkám során számos szimuláció végrehajtására, és szoftverfejlesztésre volt szükség. A 2. 3. és 5. fejezetben bemutatott módszertan megvalósítására általános célú moduláris keretrendszereket készítettem, melynek egyes funkciói igény szerint szabályozhatók, illetve lecserélhetők. A kódok fejlesztését és a szimulációk futtatását MATLAB R2010b-R2018b környezetben végeztem, Signal Processing Toolbox, Image Processing Toolbox, Statistics and Machine Learning Toolbox, Deep Learning Toolbox, Wavelet Toolbox, és Parallel Computing Toolbox segítségével. Munkám során további, publikus szoftvercsomagokat is felhasználtam:

RAIT: A racionális függvényrendszerekkel kapcsolatos műveletekhez, így a rendszerek előállításához, approximációhoz, és optimalizáláshoz a Rational Approximation and Interpolation Toolbox-ot (RAIT) [KovLoc12] használtam fel.

WFDB: A PhysioNet adatbázisainak beolvasását és feldolgozását a WaveForm DataBase (WFDB) [SilMoo14] segítségével végeztem.

LIBSVM: Az SVM osztályozás megvalósításához a LIBSVM [ChaLin11] csomag implementációit használtam fel.

Köszönetnyilvánítás

A kutatásomat az ELTE Informatika Doktori Iskola ösztöndíjas hallgatójaként, majd az ELTE IK Numerikus Analízis Tanszék tanársegédjeként végeztem. Az eredmények megszületését több pályázat segítette, így az egyes cikkek az Emberi Erőforrások Minisztériuma ÚNKP-16-3 és ÚNKP-18-3 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának támogatásával készültek, illetve az EFOP-3.6.3-VEKOP-16-2017-00001 projekt* keretében valósultak meg.

Dolgozatom végén szeretném megköszönni mindazok közreműködését, akik nélkül ez az értékezés nem születhetett volna meg.

Elsősorban köszönöm témavezetőmnek, Dr. Fridli Sándornak a támogatását és buzdítását. A Tanár Úr az elmúlt években rengeteg időt és figyelmet szánt arra, hogy ötletekkel és útmutatással segítse a munkámat. A közös szakmai munkán túl köszönettel tartozom neki az utam egyengetéséért, a szakmai lehetőségek felkutatásáért és biztosításáért.

Köszönöm Dr. Schipp Ferencnek az ötleteit és együttműködését, valamint Dr. Kovács Péternek és Dózsa Tamásnak a gyümölcsöző közös munkát. Köszönöm Dr. Toledo Rodolfonak a 4. fejezet számításainak alapos átnézését. Köszönöm továbbá a tanszéki kollégák befogadó hozzáállását és szakmai segítségét, valamint a kutatóhelyi vita bírálóinak hasznos észrevételeit.

Köszönöm a Pozitron Diagnosztika Központ munkatársainak, különösen Dr. Lengyel Zsoltnak a közreműködését. Látatlanban is szeretnék köszönetet mondani a publikus adatbázisok: a PhysioNet hálózat, az MIT-BIH Arrhythmia Database, a QT Database, az ELCAP Database, és a LIDC-IDRI létrehozóinak is munkájukért.

Köszönöm Varga Ivánnak a dolgozat lelkes átnézését és észrevételeit. Köszönöm Pacskó Vivien támogatását és szeretetét, kedves biztatását és inspirációját az értékezés elkészítéséhez. Külön köszönet illeti a dolgozat alapos átolvasásáért és korrektúrázásáért. Köszönöm a családom, elsősorban édesanyám belém vetett hitét, támogatását tanulmányaim alatt, és biztatását a doktori program megkezdéséhez, mely tanulmányokat most, ezen értekezéssel zárok le.

*EFOP-3.6.3-VEKOP-16-2017-00001: Tehetséggondozás és kutatói utánpótlás fejlesztése autonóm járműirányítási technológiák területén – A projekt a Magyar Állam és az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

Tárgymutató

- alacsony dózis (CT), 112
 álnegatívok – FN, 33
 álpozitívok – FP, 33
 ANN – mesterséges neurális háló, 36
 aritmia (EKG), 47
 axiális CT felvétel, 111

 biortogonális rendszer, 24
 Blaschke-függvények, 21

 Cholesky-felbontás (racionális
 Gram-mátrix), 98
 CNR – kontraszt-zaj arány, 12
 cone-beam (CT), 111
 CT – komputertomográfia, 107

 diagnosztikai mennyiségek (EKG), 44

 EKG – elektrokardiogram, 41
 előrecsatolt neurális háló, 36
 elektrokardiogram – EKG, 41
 elemi racionális függvények, 18
 elvezetés (EKG), 42

 fan-beam (CT), 111
 fantom (CT), 119
 FN – álnegatívok, 33
 Fourier-sor, 13
 Fourier-transzformált, 29
 FP – álpozitívok, 33
 FR – full reference, 115
 full reference – FR, 115

 Gauss-függvény, 15

 gépi tanulás, 32
 Gram-mátrix (racionális rendszer), 95

 Hardy-tér, 17
 Hermite-függvények, 15
 Hermite-polinomok, 15
 hipergeometrikus függvény, 96
 hiperparaméter, 34
 Hounsfield Unit – HU (CT), 109
 HU – Hounsfield Unit (CT), 109

 inverz Fourier-transzformált, 29
 inverzpólus, 18
 irányítatlan tanulás, 32
 irányított tanulás, 32
 iteratív rekonstrukció, 31

 jel-zaj arány – SNR, 11
 jellemzővektor, 32

 Kautz-rendszer, 24
 képminőséget mérő metrikák, 115
 keresztvalidáció, 34
 klaszterezés, 32
 komputertomográfia – CT, 107
 konfúziós mátrix, 34
 kontraszt-zaj arány – CNR, 12
 korrelációs együttható, 127
 korrigált QT-hossz – QTc (EKG), 44

 Laguerre-rendszer, 24
 lineáris elnyelési/gyengítési
 együttható (CT), 108

- Malmquist–Takenaka, MT-rendszer, 22
- mean opinion score – MOS, 129
- mean squared error – MSE, 10
- mesterséges neurális háló – ANN, 36
- MIT-BIH Arrhythmia Database, 47
- módosított racionális alapfüggvények, 20
- MOS – mean opinion score, 129
- MSE – mean squared error, 10
- multiplicitás (inverzpólus), 18
- no reference – NR, 116
- NR – no reference, 116
- osztályozás, 32
- +P – pozitív prediktivitás, 34
- P hullám (EKG), 43
- Pascal-mátrix, 98
- percent root difference – PRD, 11
- percent root difference normalized – PRDN, 11
- Poisson-féle magfüggvény, 22
- pólus, 18
- pólusnagyság, 18
- pólusszög, 18
- pontosság (osztályozás), 33
- posterior valószínűségek, 35
- pozitív prediktivitás – +P, 34
- PRD – percent root difference, 11
- PRDN – percent root difference normalized, 11
- profil (CT), 108
- projekció (CT), 108
- projekció (Hilbert-tér), 13
- pszeudohiperbolikus metrika, 21
- QRS komplexus (EKG), 43
- QT Database, 47
- QTc – korrigált QT-hossz (EKG), 44
- racionális alapfüggvények, 18
- racionális approximáció, 23
- racionális rendszer, 17
- radiális bázisfüggvény – RBF, 34
- Radon-transzformáció, 26
- RBF – radiális bázisfüggvény, 34
- referenciakép, 115
- RMSE – root mean squared error, 10
- root mean squared error – RMSE, 10
- RR-intervallum (EKG), 44
- Se – szenzitivitás, 34
- Shepp-Logan fantom, 120
- SNR – jel-zaj arány, 11
- spirális CT felvétel, 111
- SVM – tartóvektor-gép, 34
- szegmentálás (EKG), 73
- szelet (CT), 109
- szenzitivitás – Se, 34
- szinogram (CT), 108
- szívütés-osztályozás (EKG), 41
- szűrt visszavetítés, 30
- T hullám (EKG), 43
- tartóvektor-gép – SVM, 34
- TN – valódi negatívok, 33
- TP – valódi pozitívok, 33
- trigonometrikus rendszer, 14
- valódi negatívok – TN, 33
- valódi pozitívok – TP, 33
- variálható vetítőoperátor, 16
- VAT – ventrikuláris aktivációs idő (EKG), 44, 83
- ventrikuláris aktivációs idő – VAT (EKG), 44, 83
- waveletek, 15

Jelölések

$\arg \min$	minimumhelyek: $\arg \min_{x \in \mathcal{D}_f} f(x) := \{x \in \mathcal{D}_f : \forall y \in \mathcal{D}_f : f(x) \leq f(y)\}$
$B_a, B_{a,\varepsilon}$	Blaschke-függvények (1.12),(1.13)
β_a	a Blaschke-függvények argumentumfüggvénye (1.16)
\mathbb{C}	komplex számok halmaza
corr	korrelációs együttható (5.1),(5.2)
\mathbb{D}	komplex egységdiszk: $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : z < 1\}$
$\overline{\mathbb{D}}$	zárt komplex egységdiszk: $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup \mathbb{T}$
\mathcal{D}_f	az f függvény értelmezési tartománya
e_k	trigonometrikus rendszer (1.2)
${}_2F_1$	Gauss-féle hipergeometrikus függvény (4.1)
\mathcal{F}	(folytonos) Fourier-transzformáció (1.29)
$\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_2$	egy- és kétváltozós Gauss-függvény (1.3),(1.28)
γ_ρ	a Blaschke-függvények argumentumfüggvénye (1.15)
$\mathcal{H}f$	az f függvény trigonometrikus konjugáltja, avagy Hilbert-transzformáltja (1.24)
$H^2(\mathbb{D}), H^2(\mathbb{T})$	Hardy-terek (1.4)
Im	komplex szám képzetes része
\mathbb{K}	valós vagy komplex számok halmaza
K	Gauss-függvényből származtatott radiális bázisfüggvény (RBF) (1.30)
\mathcal{L}	az \mathbb{R}^2 sík egyeneseseinek halmaza
$L^2(I), L_w^2(I)$	négyzetesen Lebesgue-integrálható függvények terei (1.1)
\mathbb{N}	természetes számok halmaza
\mathbb{N}^+	pozitív egész számok halmaza
\mathfrak{N}	megszámlálható halmaz
ω_ρ	racióális alapfüggvények argumentumfüggvénye (3.2)
\mathfrak{P}	$\overline{\mathbb{D}}$ feletti polinomok halmaza (1.9)
P_m^a	az R_m^a altér projekciós operátora (1.7)
P_m^{*a}	az R_m^{*a} altér projekciós operátora (1.7)
P_N^b	az R_N^b altér projekciós operátora (1.21)
p_ρ	Poisson-féle magfüggvény (1.17)

Φ_k^b	Malmquist–Takenaka (MT) függvények (1.19)
$\phi_{a,k}$	módosított racionális alapfüggvények (1.8)
\mathbb{R}	valós számok halmaza
\mathbb{R}^+	pozitív valós számok halmaza
\mathbb{R}_0^+	nemnegatív valós számok halmaza
\mathfrak{R}	$\overline{\mathbb{D}}$ -n analitikus racionális törtfüggvények halmaza (1.10)
\mathfrak{R}_0	$\overline{\mathbb{D}}$ -n analitikus valódi racionális törtfüggvények halmaza (1.6)
\mathcal{R}	Radon-transzformáció operátor (1.26)
R_m^a	(módosított) racionális alapfüggvények által kifesztett altér . (1.7)
R_m^{*a}	racionális alapfüggvények kiterjesztett altere (1.22)
$r_{a,k}$	racionális alapfüggvények (1.5)
$\tilde{r}_{a,k}$	normalizált racionális alapfüggvények (3.1)
Re	komplex szám valós része
ρ_0	pszeudohiperbolikus metrika (1.14)
\mathcal{S}	$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ típusú, tetszőleges egyenes mentén impropriusan integrálható függvények osztálya (lásd Radon-transzformáció)
S_N^b	MT-függvények által kifesztett altér (1.20)
span	adott vektorrendszer által kifesztett altér
\mathbb{T}	komplex egységkör (tórusz): $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : z = 1\}$
ξ	síkbeli egységvektor (1.27)
χ_I	karaktisztikus függvény: $\chi_I(x) := \begin{cases} 1, & x \in I \\ 0, & x \notin I \end{cases} \quad (I \subset \mathbb{R})$
\mathbb{Z}	egész számok halmaza
*	konvolúció: $(f * g)(z) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(z-x) dx \quad (f, g \in L^1(\mathbb{R}^n); z \in \mathbb{R}^n)$

Irodalomjegyzék

- [AA12] *Testing and reporting performance results of cardiac rhythm and ST segment measurement algorithms*. Standard ANSI/AAMI EC57:2012. American National Standards Institute, Inc. (ANSI), Association for the Advancement of Medical Instrumentation (AAMI), 2012.
- [Add05] P. Addison. „Wavelet transforms and the ECG: A review”. *Physiol. Meas.* 26.5 (2005. nov.), R155–99. DOI: 10.1088/0967-3334/26/5/R01.
- [AfoTom95] V. X. Afonso és W. J. Tompkins. „Detecting ventricular fibrillation”. *IEEE Eng. Med. Biol. Mag.* 14.2 (1995. márc.), 152–159. DOI: 10.1109/51.376752.
- [Arm+11] S. G. Armato III et al. „The Lung Image Database Consortium (LIDC) and Image Database Resource Initiative (IDRI): A Completed Reference Database of Lung Nodules on CT Scans”. *Medical Physics* 38.2 (2011. febr.), 915–931. DOI: 10.1118/1.3528204.
- [Bar+89] S. Barro, R. Ruiz, D. Cabello és J. Mira. „Algorithmic sequential decision-making in the frequency domain for life threatening ventricular arrhythmias and imitative artefacts: a diagnostic system”. *J. Biomed. Eng.* 11.4 (1989. júl.), 320–328. DOI: 10.1016/0141-5425(89)90067-8.
- [Bez81] J. C. Bezdek. *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*. Springer US, 1981.
- [Bis06] C. Bishop. *Pattern Recognition and Machine Learning*. Springer-Verlag New York, 2006.
- [BoaFle12] F. Boas és D. Fleischmann. „CT artifacts: Causes and reduction techniques”. *Imaging in Medicine* 4.2 (2012. ápr.), 229–240. DOI: 10.2217/iim.12.13.

- [Bog15] G. Bognár. „Image quality measurement for low-dose human lung CT scans”. *38th Int. Conf. Telecom. Sign. Proc. (TSP)*. 2015. júl., 587–591. DOI: 10.1109/TSP.2015.7296331.
- [Bog16] G. Bognár. „A No-Reference Image Quality Metric with Application in Low-Dose Human Lung CT Image Processing”. *Int. J. Adv. Telecom. Elect. Sign. Syst.* 5.1 (2016. jan.), 1–7. DOI: 10.11601/ijates.v5i1.136.
- [Bog+19] G. Bognár, S. Fridli, P. Kovács és F. Schipp. „Adaptive Rational Transformations in Biomedical Signal Processing”. *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2018*. Szerk. S. Péter et al. Springer, megjelenés alatt.
- [BogFri18] G. Bognár és S. Fridli. „Heartbeat Classification of ECG Signals Using Rational Function Systems”. *Computer Aided Systems Theory – EUROCAST 2017. Lecture Notes in Computer Science, vol. 10672*. Szerk. R. Moreno-Díaz et al. Springer, Cham, 2018, 187–195. DOI: 10.1007/978-3-319-74727-9_22.
- [BogFri19a] G. Bognár és S. Fridli. „ECG Heartbeat Classification by Means of Variable Rational Projection”. *Biomed. Sign. Process. Control* (közlésre benyújtva).
- [BogFri19b] G. Bognár és S. Fridli. „ECG Segmentation by Adaptive Rational Transform”. *Computer Aided Systems Theory – EUROCAST 2019. Lecture Notes in Computer Science*. Szerk. R. Moreno-Díaz et al. Springer, megjelenés alatt.
- [BogFri19c] G. Bognár és S. Fridli. „On the Pole Stability of Rational Approximation”. *Ann. Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.* 49 (2019. okt.), 35–49.
- [BogSch18] G. Bognár és F. Schipp. „Geometric interpretation of QRS complexes in ECG signals by rational functions”. *Ann. Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.* 47 (2018. aug.), 155–166.
- [BokSch98] J. Bokor és F. Schipp. „Approximate Identification in Laguerre and Kautz Bases”. *Automatica* 34.4 (1998. ápr.), 463–468. DOI: 10.1016/S0005-1098(97)00201-X.
- [Bus+02] J. T. Bushberg, J. A. S. and E. M. Leidholdt Jr. és J. M. Boone. *The Essential Physics of Medical Imaging*. 2. kiad. Lippincott Williams & Wilkins, Philadelphia, PA, 2002. DOI: 10.1137/1.9780898719277.

- [ChaLin11] C.-C. Chang és C.-J. Lin. „LIBSVM: A Library for Support Vector Machines”. *ACM Trans. Intell. Sys. and Tech.* 2.3 (2011. ápr.), 27:1–27:27. DOI: 10.1145/1961189.1961199.
- [ChaODwRei04] P. de Chazal, M. O’Dwyer és R. B. Reilly. „Automatic classification of heartbeats using ECG morphology and heartbeat interval features”. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 51.7 (2004. júl.), 1196–1206. DOI: 10.1109/TBME.2004.827359.
- [CheDonSau01] S. S. Chen, D. L. Donoho és M. A. Saunders. „Atomic Decomposition by Basis Pursuit”. *SIAM Review* 43.1 (2001. jan.), 129–159. DOI: 10.1137/S003614450037906X.
- [CIC18] *2018 Computing in Cardiology Conference (CinC)*. 2018.
- [CorVap95] C. Cortes és V. Vapnik. „Support-Vector Networks”. *J. Mach. Learn.* 20.3 (1995. szept.), 273–297. DOI: 10.1023/A:1022627411411.
- [Dea83] S. R. Deans. *The Radon transform and some of its application*. New York: John Wiley, 1983.
- [Dou09] G. Dougherty. *Digital Image Processing for Medical Applications*. Cambridge University Press, 2009. DOI: 10.1017/CB09780511609657.
- [DozBogKov19] T. Dózsa, G. Bognár és P. Kovács. „Ensemble learning for heartbeat classification using adaptive orthogonal transformations”. *Computer Aided Systems Theory – EUROCAST 2019. Lecture Notes in Computer Science*. Szerk. R. Moreno-Díaz et al. Springer, megjelenés alatt.
- [DozKov16] T. Dózsa és P. Kovács. „ECG Signal Compression Using Adaptive Hermite Functions”. *ICT Innovations 2015*. Szerk. S. Loshkovska és S. Koceski. Springer, Cham, 2016, 245–254. DOI: 10.1007/978-3-319-25733-4_25.
- [Foi+08] A. Foi, M. Trimeche, V. Katkovnik és K. Egiazarian. „Practical Poissonian-Gaussian Noise Modeling and Fitting for Single-Image Raw-Data”. *IEEE Trans. Image Proc.* 17.10 (2008. okt.), 1737–1754. DOI: 10.1109/TIP.2008.2001399.
- [Fri+12] S. Fridli, P. Kovács, L. Lócsi és F. Schipp. „Rational modeling of multi-lead QRS complexes in ECG signals”. *Ann. Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.* 37 (2012), 145–155.
- [Fri+90] G. M. Friesen et al. „A comparison of the noise sensitivity of nine QRS detection algorithms”. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 37.1 (1990. jan.), 85–98. DOI: 10.1109/10.43620.

- [FriLocSch12] S. Fridli, L. Lócsi és F. Schipp. „Rational Function Systems in ECG Processing”. *Computer Aided Systems Theory – EUROCAST 2011. Lecture Notes in Computer Science, vol. 6927*. Szerk. R. Moreno-Díaz et al. Springer, Berlin, Heidelberg, 2012, 88–95. DOI: 10.1007/978-3-642-27549-4_12.
- [FriSch11] S. Fridli és F. Schipp. „Biorthogonal systems to rational functions”. *Ann. Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.* 35 (2011), 95–105.
- [Gey+15] L. L. Geyer et al. „State of the Art: Iterative CT Reconstruction Techniques”. *Radiology* 276.2 (2015. júl.), 339–357. DOI: 10.1148/radiol.2015132766.
- [GilKovSam14] Z. Gilián, P. Kovács és K. Samiee. „Rhythm-based accuracy improvement of heart beat detection algorithms”. *Comput. Card. Conf.* 2014. szept., 269–272.
- [Gol+00] A. L. Goldberger et al. „PhysioBank, PhysioToolkit, and PhysioNet: Components of a New Research Resource for Complex Physiologic Signals”. *Circulation* 101.23 (2000. jún.), e215–e220. DOI: 10.1161/01.CIR.101.23.e215.
- [Gol06] A. L. Goldberger. *Clinical Electrocardiography: A Simplified Approach*. 7. kiad. Mosby, 2006.
- [GolPer73] G. H. Golub és V. Pereyra. „The Differentiation of Pseudo-Inverses and Nonlinear Least Squares Problems Whose Variables Separate”. *SIAM J. Numer. Anal.* 10.2 (1973. ápr.), 413–432. DOI: 10.1137/0710036.
- [HeuHofWah05] P. S. C. Heuberger, P. M. J. van den Hof és B. Wahlberg, szerk. *Modelling and identification with rational orthogonal basis functions*. Springer-Verlag London Limited, 2005. DOI: 10.1007/1-84628-178-4.
- [Hor91] K. Hornik. „Approximation capabilities of multilayer feedforward networks”. *Neural Networks* 4.2 (1991), 251–257. DOI: 10.1016/0893-6080(91)90009-T.
- [Jan+93] R. Jane, S. Olmos, P. Laguna és P. Caminal. „Adaptive Hermite models for ECG data compression: performance and evaluation with automatic wave detection”. *Proc. Comput. Card. Conf.* 1993. szept., 389–392. DOI: 10.1109/CIC.1993.378422.

- [Jia+06] X. Jiang, L. Zhang, Q. Zhao és S. Albayrak. „ECG Arrhythmias Recognition System Based on Independent Component Analysis Feature Extraction”. *Proc. IEEE Region. 10 Conf.* 2006. nov., 1–4. DOI: 10.1109/TENCON.2006.343781.
- [KakSla01] A. Kak és M. Slaney. *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. Society for Industrial és Applied Mathematics, 2001. DOI: 10.1137/1.9780898719277.
- [Kas00] J. A. Kastor. *Arrhythmias*. 2. kiad. W. B. Saunders, 2000.
- [KasWitTer88] M. Kass, A. Witkin és D. Terzopoulos. „Snakes: Active contour models”. *Int. J. Computer Vis.* 1.4 (1988. jan.), 321–331. DOI: 10.1007/BF00133570.
- [KenEbe95] J. Kennedy és R. Eberhart. „Particle swarm optimization”. *IEEE Int. Conf. Neur. Networks (ICNN)*. 1995. nov. DOI: 10.1109/ICNN.1995.488968.
- [Kha+13] A. H. Khandoker, C. Karmakar, M. Brennan, A. Voss és M. Palaniswami. *Poincaré Plot Methods for Heart Rate Variability Analysis*. Springer New York Heidelberg Dordrecht London, 2013. DOI: 10.1007/978-1-4614-7375-6.
- [KohHenOrg02] B. Kohler, C. Hennig és R. Orglmeister. „The principles of software QRS detection”. *IEEE Eng. Med. Biol. Mag.* 21.1 (2002. jan.), 42–57. DOI: 10.1109/51.993193.
- [Kov16] P. Kovács. „Transformation methods in signal processing”. PhD értekezés. ELTE Eötvös Loránd Tudományegyetem, 2016. DOI: 10.15476/ELTE.2015.187.
- [Kov+17] P. Kovács, C. Böck, J. Meier és M. Huemer. „ECG segmentation using adaptive Hermite functions”. *Asilomar Conf. Signals. Syst. Comput.* 2017. okt., 1476–1480. DOI: 10.1109/ACSSC.2017.8335601.
- [Kov18] P. Kovács. „Rational Variable Projection Methods in ECG Signal Processing”. *Computer Aided Systems Theory – EUROCAST 2017. Lecture Notes in Computer Science, vol. 10672*. Szerk. R. Moreno-Díaz et al. Springer, Cham, 2018, 196–203. DOI: 10.1007/978-3-319-74727-9_23.
- [Kov+19] P. Kovács, C. Böck, T. Dózsa, J. Meier és M. Huemer. „Waveform Modeling by Adaptive Weighted Hermite Functions”. *IEEE Int. Conf. Acous. Speech Sign. Proc. (ICASSP)*. 2019. máj., 1080–1084. DOI: 10.1109/ICASSP.2019.8683296.

- [KovFriSch19] P. Kovács, S. Fridli és F. Schipp. „Generalized Rational Variable Projection with Application in ECG Compression”. *IEEE Trans. Sign. Proc.* (Megjelenés alatt).
- [KovKirGab13] P. Kovács, S. Kiranyaz és M. Gabbouj. „Hyperbolic particle swarm optimization with application in rational identification”. *Proc. 21st Euro. Sign. Proc. Conf.* 2013. szept., 1–5.
- [KovLoc12] P. Kovács és L. Lócsi. „RAIT: the Rational Approximation and Interpolation Toolbox for Matlab, with Experiments on ECG Signals”. *Int. J. Adv. Telecom. Elect. Sign. Syst.* 1.2-3 (2012. nov.), 67–752. DOI: 10.11601/ijates.v1i2-3.18.
- [Lag+00] M. Lagerholm, C. Peterson, G. Braccini, L. Edenbrandt és L. Sornmo. „Clustering ECG complexes using Hermite functions and self-organizing maps”. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 47.7 (2000. júl.), 838–848. DOI: 10.1109/10.846677.
- [Lag+97] P. Laguna, R. G. Mark, A. Goldberg és G. B. Moody. „A database for evaluation of algorithms for measurement of QT and other waveform intervals in the ECG”. *IEEE Comput Card.* 1997. szept., 673–676.
- [LagJanCam94] P. Laguna, R. Jané és P. Caminal. „Automatic Detection of Wave Boundaries in Multilead ECG Signals: Validation with the CSE Database”. *Comput. Biomed. Res.* 27.1 (1994. febr.), 45–60. DOI: 10.1006/cbmr.1994.1006.
- [Lan+12] G. de Lannoy, D. Francois, J. Delbeke és M. Verleysen. „Weighted Conditional Random Fields for Supervised Interpatient Heartbeat Classification”. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 59.1 (2012. jan.), 241–247. DOI: 10.1109/TBME.2011.2171037.
- [Lar+11] F. J. Larke et al. „Estimated Radiation Dose Associated With Low-Dose Chest CT of Average-Size Participants in the National Lung Screening Trial”. *AJR Am. J. Roentgenol.* 197.5 (2011. nov.), 1165–1169. DOI: 10.2214/AJR.11.6533.
- [LinKuo11] W. Lin és C.-C. J. Kuo. „Perceptual visual quality metrics: A survey”. *J. Vis. Commun. Image R.* 22.4 (2011), 297–312. DOI: 10.1016/j.jvcir.2011.01.005.
- [LinYan14] C.-C. Lin és C.-M. Yang. „Heartbeat Classification Using Normalized RR Intervals and Morphological Features”. *Math. Problem Eng.* 2014 (2014. máj.), 1–11. DOI: 10.1155/2014/712474.

- [LlaKhaMar12] M. Llamedo, A. Khawaja és J. P. Martinez. „Cross-Database Evaluation of a Multilead Heartbeat Classifier”. *IEEE Trans. Inform. Tech. Biomed.* 16.4 (2012. júl.), 658–664. DOI: 10.1109/TITB.2012.2193408.
- [Llo82] S. Lloyd. „Least squares quantization in PCM”. *IEEE Trans. Info. Theo.* 28.2 (1982. márc.), 129–137. DOI: 10.1109/TIT.1982.1056489.
- [Loc09] L. Lócsi. „Approximating poles of complex rational functions”. *Acta Univ. Sapientiae, Mathematica* 1.2 (2009), 169–182.
- [Loc13] L. Lócsi. „A hyperbolic variant of the Nelder–Mead simplex method in low dimensions”. *Acta Univ. Sapientiae, Mathematica* 5.2 (2013. szept.), 169–183. DOI: 10.2478/ausm-2014-0012.
- [Loc15] L. Lócsi. „Racionális függvényrendszerek alkalmazása a jelfeldolgozásban”. PhD értekezés. ELTE Eötvös Loránd Tudományegyetem, 2015.
- [Luz+16] E. J. d. S. Luz, W. R. Schwartz, G. Cámara-Chávez és D. Menotti. „ECG-based heartbeat classification for arrhythmia detection: A survey”. *Comput. Methods Programs Biomed.* 127 (2016. ápr.), 144–164. DOI: 10.1016/j.cmpb.2015.12.008.
- [MalPlo95] J. Malmivuo és R. Plonsey. *Bioelectromagnetism*. Oxford University Press, 1995.
- [MalZha93] S. Mallat és Z. Zhang. „Matching pursuits with time-frequency dictionaries”. *IEEE Trans. Signal Proc.* 41.12 (1993. dec.), 3397–3415. DOI: 10.1109/78.258082.
- [Mar+04] J. P. Martinez, R. Almeida, S. Olmos, A. P. Rocha és P. Laguna. „A wavelet-based ECG delineator: evaluation on standard databases”. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 51.4 (2004. ápr.), 570–581. DOI: 10.1109/TBME.2003.821031.
- [MinNakToy99] K. Minami, H. Nakajima és T. Toyoshima. „Real-time discrimination of ventricular tachyarrhythmia with Fourier-transform neural network”. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 46.2 (1999. febr.), 179–185. DOI: 10.1109/10.740880.
- [Mit97] T. M. Mitchell. *Machine Learning*. McGraw-Hill, New York, 1997.
- [MooMar01] G. B. Moody és R. G. Mark. „The impact of the MIT-BIH Arrhythmia Database”. *IEEE Eng. Med. Biol. Mag.* 20.3 (2001. máj.), 45–50. DOI: 10.1109/51.932724.

- [NelMea65] J. A. Nelder és R. Mead. „A Simplex Method for Function Minimization”. *Comput. J.* 7.4 (1965. jan.), 308–313. DOI: 10.1093/comjnl/7.4.308.
- [OliAndMF11] L. S. C. de Oliveira, R. V. Andreao és M. Marcinelli-Filho. „Premature Ventricular beat classification using a dynamic Bayesian Network”. *Proc. IEEE Int. Conf. Eng. Med. Biol. Soc.* 2011. aug., 4984–4987. DOI: 10.1109/IEMBS.2011.6091235.
- [OsoHoaMar04] S. Osowski, L. T. Hoai és T. Markiewicz. „Support vector machine-based expert system for reliable heartbeat recognition”. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 51.4 (2004. ápr.), 582–589. DOI: 10.1109/TBME.2004.824138.
- [PanTom85] J. Pan és W. J. Tompkins. „A Real-Time QRS Detection Algorithm”. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* BME-32.3 (1985. ápr.), 230–236. DOI: 10.1109/TBME.1985.325532.
- [PfiBre14] L. Pfister és Y. Bresler. „Tomographic reconstruction with adaptive sparsifying transforms”. *IEEE Int. Conf. Acous. Speech Sign. Proc. (ICASSP)*. 2014. máj., 6914–6918. DOI: 10.1109/ICASSP.2014.6854940.
- [PleRouGue16] A. du Plessis, S. G. le Roux és A. Guelpa. „Comparison of medical and industrial X-ray computed tomography for non-destructive testing”. *Case Studies in Nondestructive Testing and Evaluation* 6.A (2016. nov.), 17–25. DOI: 10.1016/j.csndt.2016.07.001.
- [PraSah03] G. K. Prasad és J. S. Sahambi. „Classification of ECG arrhythmias using multi-resolution analysis and neural networks”. *Proc. Conf. Convergent Technol. Asia-Pacific Region.* 1. 2003. okt., 227–231. DOI: 10.1109/TENCON.2003.1273320.
- [Ree+09] A. P. Reeves, A. M. Biancardi, D. Yankelevitz, S. Fotin, B. M. Keller, A. Jirapatnakul és J. Lee. „A public image database to support research in computer aided diagnosis”. *Conf. Proc. IEEE Eng. Med. Biol. Soc.* 2009. szept., 3715–3718. DOI: 10.1109/IEMBS.2009.5334807.
- [RehBer00] M. M. Rehani és M. Berry. „Radiation doses in computed tomography”. *BMJ* 320.7235 (2000. márc.), 593–594. DOI: 10.1136/bmj.320.7235.593.
- [RodGonIll05] J. Rodriguez, A. Goni és A. Illarramendi. „Real-time classification of ECGs on a PDA”. *IEEE Trans. Info. Tech. Biomed.* 9.1 (2005. márc.), 23–34. DOI: 10.1109/TITB.2004.838369.

- [SamKovGab15] K. Samiee, P. Kovács és M. Gabbouj. „Epileptic Seizure Classification of EEG Time-Series Using Rational Discrete Short-Time Fourier Transform”. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 62.2 (2015. febr.), 541–552. DOI: 10.1109/TBME.2014.2360101.
- [SamKovGab17] K. Samiee, P. Kovács és M. Gabbouj. „Epileptic seizure detection in long-term EEG records using sparse rational decomposition and local Gabor binary patterns feature extraction”. *Knowl.-Based. Syst.* 118 (2017. febr.), 228–240. DOI: 10.1016/j.knosys.2016.11.023.
- [San+13] M. Sansone, R. Fusco, A. Pepino és C. Sansone. „Electrocardiogram Pattern Recognition and Analysis Based on Artificial Neural Networks and Support Vector Machines: A Review”. *J. Healthc. Eng.* 4.4 (2013. dec.), 465–504. DOI: 10.1260/2040-2295.4.4.465.
- [Sch04] F. Schipp. *Radon transzformáció*. Egyetemi jegyzet. 2004.
- [Sch10] F. Schipp. *Racionális ortogonális rendszerek*. Egyetemi jegyzet. 2010.
- [Sch15] J. Schmidhuber. „Deep Learning in Neural Networks: An Overview”. *Neural Networks* 61 (2015. jan.), 85–117. DOI: 10.1016/j.neunet.2014.09.003.
- [SheBov06] H. R. Sheikh és A. C. Bovik. „Image information and visual quality”. *IEEE Trans. Image Proc.* 15.2 (2006. febr.), 430–444. DOI: 10.1109/TIP.2005.859378.
- [SheLog74] L. Shepp és B. F. Logan. „The Fourier Reconstruction of a Head Section”. *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 21.3 (1974. jún.), 21–43. DOI: 10.1109/TNS.1974.6499235.
- [SilMoo14] I. Silva és G. Moody. „An Open-source Toolbox for Analysing and Processing PhysioNet Databases in MATLAB and Octave”. *J. Open Res. Softw.* 2.1 (2014. szept.), e27. DOI: 10.5334/jors.bi.
- [SzabBokSch99] Z. Szabó, J. Bokor és F. Schipp. „Identification of rational approximate models in H^∞ using generalized orthonormal basis”. *IEEE Trans. Autom. Contr.* 44.1 (1999. jan.), 153–158. DOI: 10.1109/9.739108.
- [Wan+04] Z. Wang, A. C. Bovik, H. R. Sheikh és E. P. Simoncelli. „Image quality assessment: from error visibility to structural similarity”. *IEEE Trans. Image Proc.* 13.4 (2004. ápr.), 600–612. DOI: 10.1109/TIP.2003.819861.

- [YeVKCoi12] C. Ye, B. V. K. Vijaya Kumar és M. T. Coimbra. „Heartbeat Classification Using Morphological and Dynamic Features of ECG Signals”. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 59.10 (2012. okt.), 2930–2941. DOI: 10.1109/TBME.2012.2213253.
- [Zha05] D. Zhang. „Wavelet Approach for ECG Baseline Wander Correction and Noise Reduction”. *Proc. IEEE Int. Conf. Eng. Med. Biol. Soc.* 2005, 1212–1215. DOI: 10.1109/IEMBS.2005.1616642.
- [ZhaChe02] D.-Q. Zhang és S.-C. Chen. „Fuzzy clustering using kernel method”. *IEEE Int. Conf. Control Autom.* 2002. jún., 162–163. DOI: 10.1109/ICCA.2002.1229535.
- [ZhaChe04] D.-Q. Zhang és S.-C. Chen. „A novel kernelized fuzzy C-means algorithm with application in medical image segmentation”. *Artificial Intelligence in Medicine* 32.1 (2004. szept.), 37–50. DOI: 10.1016/j.artmed.2004.01.012.
- [ZhuMil10] X. Zhu és P. Milanfar. „Automatic Parameter Selection for Denoising Algorithms Using a No-Reference Measure of Image Content”. *IEEE Trans. Image Proc.* 19.12 (2010. dec.), 3116–3132. DOI: 10.1109/TIP.2010.2052820.

Orvosi jel- és képfeldolgozás transzformációs módszerekkel

Bognár Gergő

DOKTORI ÉRTEKEZÉS ÖSSZEFOGLALÁSA

Értekezésem témája orvosi jel- és képfeldolgozási feladatok vizsgálata, ahol a célkitűzésem megbízható automatikus módszerek fejlesztése volt, matematikai modellezés, transzformációs módszerek felhasználásával.

Kifejlesztettem egy új, páciens-specifikus modellezésen alapuló EKG szívütés-osztályozási módszert, melynek teljesítménye meghaladja a korábbi eljárásokét. Kidolgoztam egy páciens-alapú pólusoptimalizációs eljárást a szívütések modellezésére, egy adaptív racionális transzformáció formájában. Javasoltam egy adaptív szegmentálási és kezdőpontválasztási stratégiát, az osztályozáshoz használt jellemzővektor kibővítését a rendszerparaméterekkel, és többféle osztályozási stratégia fúzióját.

Egy új, adaptív megközelítést javasoltam az EKG hullámformák modellezésére, szegmentálására és rekonstrukciójára. A kritikus pontok detektálására kifejlesztett módszer több szempontból, például a P-hullám helyének meghatározásában meghaladja a korábbi eljárások hatékonyságát. Kidolgozásra került a QRS komplexus racionális függvényeken alapuló geometriai modellje a kritikus pontok és diagnosztikai mennyiségek származtatásához. Vizsgáltam rekonstrukciós technikákat a jel diagnosztikai mennyiségekből történő visszaállításához. Ez egyúttal egy szívütés-szintetizáló módszert és egy alternatív pólusválasztási stratégiát eredményez. Végül kidolgoztam egy determinisztikus szegmentálási eljárást a szívütések hullámformákra bontására, és a kritikus pontok detektálására, mindezt egy erre a célra kialakított adaptív racionális transzformáción keresztül.

A racionális rendszerekkel történő approximáció problémakörét vizsgálva alkalmas felső korlátot adtam a pólusnagyság perturbációjára a megengedhető approximációs hiba függvényében. Az eredmény felhasználható az EKG jelfeldolgozási gyakorlatban a racionális transzformáció kezeléséhez, például az inverzpólusok kvantálására, és a pólusoptimalizálás vezérlésére.

Egy új metrikát fejlesztettem ki alacsony dózísú tüdő CT felvételek képminőségének objektív mérésére, valamint kialakítottam egy CT szimulációs környezetet egy alkalmas zajmodell adaptálásával, és egy új tüdőfantom konstrukciójával. A szimuláció CT képek szintetizálását teszi lehetővé fejlesztési célból, a javasolt metrika pedig alacsony és normál dózísú CT felvételek esetén is elfogadhatónak bizonyult.

Eredményeimet 9 tudományos közleményben publikáltam.

Biomedical image and signal processing by means of transformation methods

Gergő Bognár

SUMMARY OF THE PHD DISSERTATION

In this dissertation, I address some specific problems of biomedical signal and image processing. My motivations were to develop reliable automatic methods by means of mathematical modelling and transformation methods.

I developed a novel ECG heartbeat classification method based on a patient-specific modelling of the heartbeats. The proposed method outperforms the previous ones. An adaptive rational transformation, a patient-based pole optimisation method is introduced for the modelling of the heartbeats. I introduced an adaptive segmentation and initial value selection method, extended the feature vector with the system parameters, and discussed multiple fusions for the classification.

I suggested a novel modelling, segmentation, and reconstruction of the ECG waveforms. The proposed fiducial point detector method outperforms the previous ones with respect to the localization of the P wave. Geometric interpretation of the QRS complex is given based on rational model curves, in order to extract fiducial points and medical descriptors. I discussed reconstruction techniques to restore signals based on the medical descriptors. This concept serves as a heartbeat synthesizer and alternative pole identification method, as well. Finally, I developed a deterministic method to segment the ECG waveforms and to detect fiducial points, based on an adaptive rational transformation.

Related to approximation problems with respect to rational systems, I gave a sufficient upper limit for the perturbation of the magnitude of the inverse poles, depending on the acceptable approximation error. These results may have a direct impact in ECG signal processing by means of rational transform. Namely, quantization of the inverse poles, and control conditions for the optimization can be provided.

I introduced a novel image quality measurement method to characterize the objective quality of low dose human lung CT scans. In addition, I developed a CT simulation framework based on an adapted noise model and a newly constructed lung phantom. The proposed simulation technique allows the synthesization of CT images for testing reasons, and the proposed metric is found to be acceptable for both low and normal dose CT scans.

The results were published in 9 scientific papers.